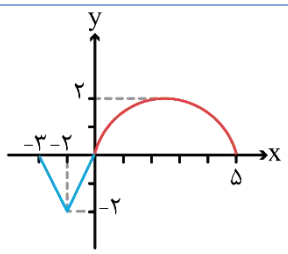
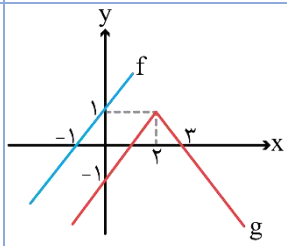
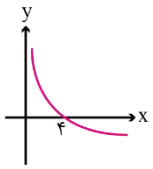
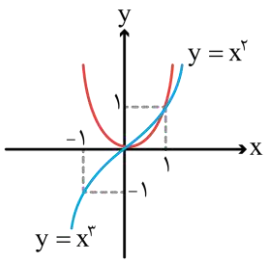
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی: **ریاضی ۳**	ساعت شروع:	تاریخ امتحان:	مدّت امتحان: **۳۰ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	رشته: **علوم تجربی**	پایهٔ **دوازدهم** دورهٔ متوسطه	تعداد صفحات: **۱ صفحه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		**گروه آموزشی ماز**	

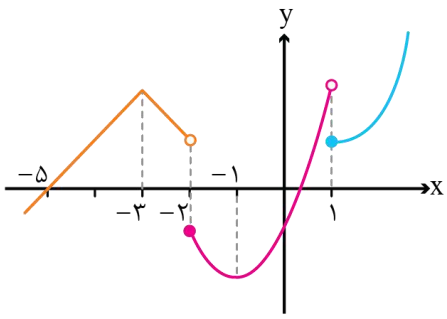
ردیف	سؤالات (پاسخ‌برگ دارد) [استفاده از ماشین حساب ساده مجاز می‌باشد]	نمره
۱	درستی یا نادرستی هر یک از عبارت های زیر را مشخص کنید. الف) چندجمله‌ای $F(x)=(\sqrt{۲-x})^{۲}+(x-۱)^{۳}$ یک چندجمله‌ای از درج ۵ است. ب) برای دو تابع g و f که $f\neq g$، تساوی $(fog)(x)=(gof)(x)$ هیچ وقت برقرار نیست. پ) برد تابع با ضابطهٔ $y=f(kx)$ همان برد تابع $y=f(x)$ است. ت) دو تابع $f(x)=-\sqrt{x-۸}$ و $g(x)=x^{۲}+۸;x\leq ۰$، وارون یکدیگرند.	۱/۷۵
۲	جملات زیر را با عبارت مناسب تکمیل کنید. الف) در بازهٔ (۰ ، ۱) نمودار تابع $y=x^{۲}$، ..... از نمودار تابع $y=x^{۳}$ قرار دارد. (بالاتر–پایین‌تر) ب) تابع $y=۲-\log_{۳}^{x}$ در دامنهٔ تعریف خود تابعی ..... است. (اکیداً نزولی– اکیداً صعودی) پ) تابع $h(x)=۲^{\sqrt{۲\sin x-۱}}$ به صورت ترکیب دو تابع $f(x)=۲^{x}$ و $g(x)=$..... است. ت) برای رسم نمودار تابع $f(x)=-۲\sin(۲x)$ به کمک نمودار تابع $g(x)=\sin x$، ابتدا نمودار تابع g در راستای محور ..... با ضریب ..... فشرده می شود، سپس نمودار حاصل در امتداد محور ..... با ضریب ..... کشیده شده و در نهایت نسبت به محور ..... قرینه می‌شود.	۲/۲۵
۳	با رسم نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}(x-۱)^{۳}+۱ ; x\geq ۱\\ x^{۲}+۲x-۱ ; -۲\leq x<۱\\ ۲-\lvert x+۳\rvert \ ; x<-۲\end{cases}$، تعیین کنید تابع در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی است؟	۲
۴	اگر $f(x)=\sqrt{۲x-x^{۲}}$ و $g(x)=\frac{۲x+۱}{۱-x}$ باشند، مطلوبست: الف) دامنهٔ تابع fog را با استفاده از تعریف به دست آورید. ب) ضابطهٔ تابع gof را تشکیل دهید.	۲/۵
۵	اگر $g(f(x))=x^{۲}+۶x+۵$ و $g(x)=x^{۲}+۴x$ باشد، ضابطه‌های ممکن برای $f(x)$ را به دست آورید.	۲
۶	با توجه به نمودار تابع $y=f(x)$، $y=-۲f(۱+۲x)+۱$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را به دست آورید. 	۳/۵
۷	ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=x^{۳}-۳x^{۲}+۳x-۳$ را به دست آورید.	۱/۲۵
۸	با توجه به نمودارهای توابع f و g ، مقادیر زیر را محاسبه کنید. الف) $fog(-۱)$ ب) $(gof)^{-۱}(-۲)$ پ) $(g^{-۱}of^{-۱})(۰)$ 	۳
۹	اگر $f=\{(۱,-۱),(۲,۰),(-۳,۴),(-۲,۱)\}$ و $g=\{(۰,۲),(۱,۳),(-۲,۱),(۲,۳)\}$ باشد تابع $(f^{-۱}og)+g$ را به دست بیاورید.	۱/۷۵
	موفق باشید.	۲۰

شبیه‌ساز امتحانات نهایی
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **ریاضی ۳**	ساعت شروع:	تاریخ امتحان:	مدّت امتحان: **۳۰ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	رشته: **علوم تجربی**	پایهٔ **دوازدهم** دورهٔ متوسطه	تعداد صفحات: **۶ صفحه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		**گروه آموزشی ماز**	

ردیف	پاسخنامه	نمره
۱	مصحح شو: الف) نادرست (۰/۵) ب) نادرست (۰/۵) پ) درست (۰/۲۵) ت) درست (۰/۵) چرا (ب) نادرسته؟ دوتا تابع مثال بزن: $\begin{cases} f(x)=x-1 \\ g(x)=x+1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (fog)(x)=f(g(x))=x \\ (gof)(x)=g(f(x))=x \end{cases}$ بریم ببینیم چرا مورد (ت) درسته! $(fog)(x)=f(g(x))=f(x^2+8)=-\sqrt{(x^2+8)-8}=-\sqrt{x^2}=-\lvert x\rvert \xrightarrow{x\le 0} (fog)(x)=x$ $(gof)(x)=g(f(x))=g(-\sqrt{x-8})=(-\sqrt{x-8})^2+8=(x-8)+8=x$ ۲۰ شو الف) تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n: هر تابع به صورت $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ را که در آن $a_n,a_{n-1},\ldots,a_1,a_0$ اعداد حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی و $a_n\neq 0$ باشد را یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n می‌نامیم. مثال: توابع زیر نمونه‌ای از توابع چندجمله‌ای هستند: $y=\sqrt{2}-x^2$ (چندجمله‌ای درجهٔ دوم) $y=2x^5-4x^3+\sqrt{7}x^2$ (چندجمله‌ای درجهٔ پنجم) ۲۰ شو ت) تابع وارون‌پذیر: برای اینکه نشان دهیم دو تابع وارون‌پذیر f و g وارون یکدیگرند، باید ثابت کنیم که ترکیب دو تابع f و g، تابع همانی است به عبارت دیگر باید ثابت کنیم که: $\begin{cases} (fog)(x)=x \\ (gof)(x)=x \end{cases}$	۱/۷۵
۲	مصحح شو: الف) بالاتر (۰/۲۵) ب) اکیداً نزولی (۰/۵) پ) $g(x)=\sqrt{2\sin x-1}$ (۰/۲۵) ت) x ها / $\frac{1}{2}$ y ها / ۲ x ها (۱/۲۵) **راهنمای تصحیح:** در مورد (ت)، به هر جای خالی (۰/۲۵) تعلق می‌گیرد. ب) اگر نمودار تابع $y=2-\log_4^x$ را رسم کنیم متوجه خواهیم شد که این تابع در دامنهٔ تعریف خود اکیداً نزولی است، ببینید:  بررسی دقیق‌تر مورد (الف): الف) در مقایسهٔ توابع $y=x^3$ و $y=x^2$ داریم: در بازهٔ $(0,1)$: نمودار $y=x^2$ بالاتر از نمودار $y=x^3$ قرار دارد. در بازهٔ $(-\infty,0)$: نمودار $y=x^2$ بالاتر از نمودار $y=x^3$ قرار دارد. در بازهٔ $(1,+\infty)$: نمودار $y=x^3$ بالاتر از نمودار $y=x^2$ قرار دارد.  	۲/۲۵

شبیه‌ساز امتحانات نهایی
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳	مصحح شو: ابتدا نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}(x-1)^3+1 & ; x\geq 1\\ x^2+2x-1 & ; -2\leq x<1\\ 2-\lvert x+3\rvert & ; x<-2\end{cases}$ را رسم می‌کنیم. (رسم نمودار هر یک از ضابطه ها ۰/۲۵)  با توجه به نمودار روبرو می‌توان گفت که تابع f : در فاصلهٔ $[-3,-\infty)$، صعودی است. (۰/۲۵) در فاصلهٔ $[-2,-3]$، نزولی است. (۰/۲۵) در فاصلهٔ $[-1,-2]$، نزولی است. (۰/۲۵) در فاصلهٔ $(1,-1]$، صعودی است. (۰/۲۵) در فاصلهٔ $[1,+\infty)$، صعودی است. (۰/۲۵)	۲
۴	مصحح شو: الف) ابتدا دامنهٔ توابع f و g را به دست می‌آوریم: $f(x)=\sqrt{2x-x^2}\rightarrow 2x-x^2\geq 0\rightarrow x(2-x)\geq 0\rightarrow D_f=[0,2]$ (۰/۲۵) $g(x)=\frac{2x+1}{1-x}\rightarrow 1-x=0\rightarrow x=1\rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{1\}$ (۰/۲۵) حال به کمک تعریف، داریم: $D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\neq 1 \mid \frac{2x+1}{1-x}\in[0,2]\}$ (۰/۲۵) $0\leq\frac{2x+1}{1-x}\leq 2\rightarrow\begin{cases}\frac{2x+1}{1-x}\geq 0\rightarrow x\in[-\frac{1}{2},1) & (۰/۲۵)\\ \frac{2x+1}{1-x}\leq 2\rightarrow\frac{4x-1}{1-x}\leq 0\rightarrow x\in(-\infty,\frac{1}{4}]\cup(1,+\infty) & (۰/۲۵)\end{cases}$ در نهایت از اشتراک مجموعه جواب‌های به دست آمده داریم: $D_{fog}=[-\frac{1}{2},\frac{1}{4}]$ (۰/۵) ب) $(gof)(x)=g(f(x))=\frac{2\sqrt{2x-x^2}+1}{1-\sqrt{2x-x^2}}$ (۰/۵) **ترکیب دو تابع g و f:** ۱- برای دو تابع f و g، داریم: $D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$ $D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$ ۲- اگر f و g دو تابع باشند، fog را ترکیب $f(g(x))$ می‌گوییم، یعنی در $f(x)$ به جای x ها، تابع $g(x)$ را جایگذاری می‌کنیم. به همین ترتیب: $(gof)(x)=g(f(x))$ $(fog)(x)=f(g(x))$	۲/۵

شبیه‌ساز امتحانات نهایی
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۵ | ۲

مصحح شو:

می‌دانیم که $(gof)(x)=x^۲+۶x+۵$ و $g(x)=x^۲+۴x$ بوده و ضابطهٔ تابع $f(x)$ (یعنی تابع درونی) مجهول است پس ابتدا باید در تابع g به جای تمامی xها، $f(x)$ را قرار دهیم:

$$g(x)=x^۲+۴x \rightarrow g(f(x))=f^۲(x)+۴f(x)$$

حال عبارت فوق را با ضابطهٔ تابع $g(f(x))$ برابر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} g(f(x))=x^۲+۶x+۵ \\ g(f(x))=f^۲(x)+۴f(x) \end{cases} \rightarrow f^۲(x)+۴f(x)=x^۲+۶x+۵ \quad (۰/۵)$$

به طرفین رابطهٔ فوق، ۴ واحد اضافه می‌کنیم:

$$f^۲(x)+۴f(x)+۴=x^۲+۶x+۵+۴ \rightarrow (f(x)+۲)^۲=x^۲+۶x+۹$$

$$\rightarrow (f(x)+۲)^۲=(x+۳)^۲ \quad (۰/۵)$$

می‌دانیم که $U^۲=V^۲ \rightarrow U=\pm V$ پس:

$$(f(x)+۲)^۲=(x+۳)^۲ \rightarrow \begin{cases} f(x)+۲=x+۳ \rightarrow f(x)=x+۱ \quad (۰/۵) \\ f(x)+۲=-x-۳ \rightarrow f(x)=-x-۵ \quad (۰/۵) \end{cases}$$

اگر ضابطهٔ توابع f و fog را در اختیار داشته باشیم و بخواهیم ضابطهٔ تابع درونی (یعنی g) را به‌دست بیاوریم، به‌روش زیر عمل می‌کنیم:

۱- در تابع f به جای تمامی x ها، $g(x)$ قرار می‌دهیم.

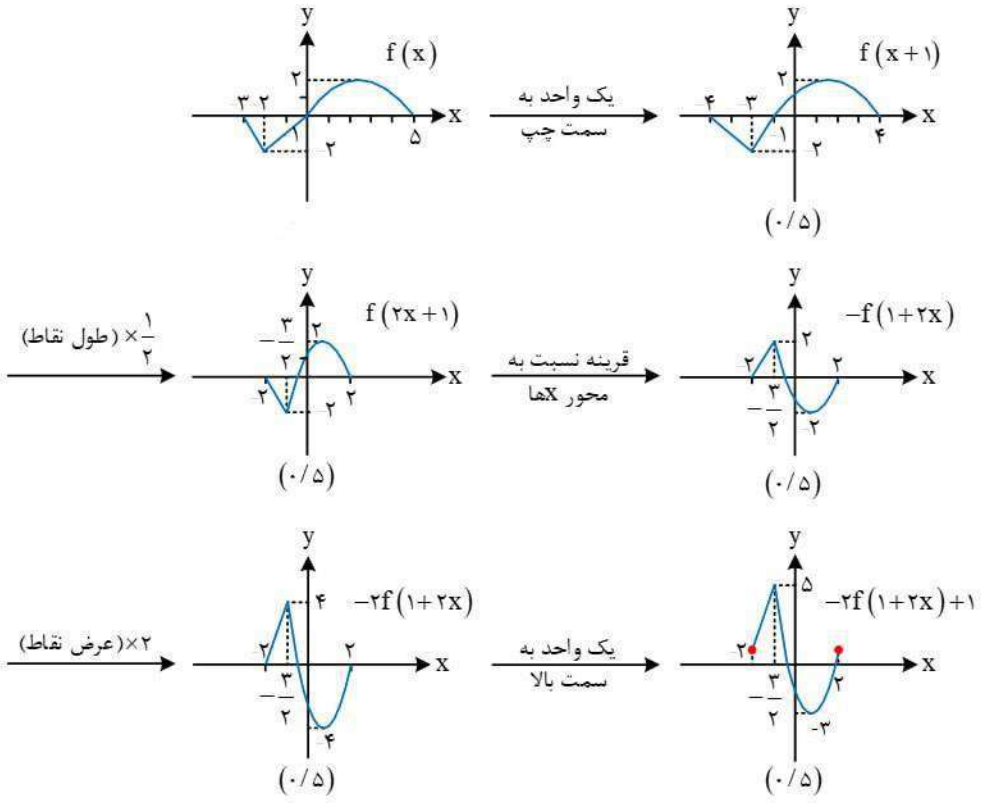
۲- عبارت به دست آمده در مرحلهٔ قبل را با ضابطهٔ تابع fog برابر قرار می‌دهیم و با عملیات جبری، $g(x)$ را تنها می‌کنیم.

۶ | ۳/۵

مصحح شو:

با توجه به نمودار تابع f، مراحل رسم را به ترتیب طی می‌کنیم:

$$y=f(x) \rightarrow g(x)=-۲f(۱+۲x)+۱$$



شبیه‌ساز امتحانات نهایی
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

با توجه به نمودار نهایی داریم:

$$\begin{cases} D_g = [-۲,۲] \ (۰/۵) \\ R_g = [-۳,۵] \ (۰/۵) \end{cases}$$

تبدیل نمودار تابع:

۱) جدول رو دریاب...

نمودار جدید $(a,k>۰)$	توضیحات و نحوه رسم	
$f(x+a)$	نمودار تابع f را به اندازهٔ a واحد در راستای محور x ها به سمت چپ منتقل می‌کنیم.	
$f(x-a)$	نمودار تابع f را به اندازهٔ a واحد در راستای محور x ها به سمت راست منتقل می‌کنیم.	
$f(x)+a$	نمودار تابع f را به اندازهٔ a واحد در راستای محور y ها به سمت بالا منتقل می‌کنیم.	
$f(x)-a$	نمودار تابع f را به اندازهٔ a واحد در راستای محور y ها به سمت پایین منتقل می‌کنیم.	
$f(-x)$	نمودار تابع f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.	
$-f(x)$	نمودار تابع f را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.	
$-f(-x)$	نمودار تابع f را نسبت به محور x ها و سپس نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.	
$f(kx)$	$k>۱$	نمودار تابع f را در راستای محور x ها با ضریب $\frac{۱}{k}$ منقبض (فشرده) می‌کنیم.
	$۰<k<۱$	نمودار تابع f را در راستای محور x ها با ضریب $\frac{۱}{k}$ منبسط (کشیده) می‌کنیم.
$kf(x)$	$k>۱$	نمودار تابع f را در راستای محور y ها با ضریب k منبسط (کشیده) می‌کنیم.
	$۰<k<۱$	نمودار تابع f را در راستای محور y ها با ضریب k منقبض (فشرده) می‌کنیم.
$\lvert f(x)\rvert$	ابتدا نمودار تابع f را رسم کرده و سپس هر آن‌چه زیر محور x ها قرار دارد را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.	
$f(\lvert x\rvert)$	ابتدا نمودار تابع f را رسم کرده و سپس هر آن‌چه سمت چپ محور y ها قرار دارد را حذف کرده و به جای آن نمودار سمت راست محور y ها را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.	
$\lvert y\rvert = f(x)$	ابتدا نمودار تابع $y=f(x)$ را رسم کرده و سپس هر آن‌چه زیر محور x ها قرار دارد را حذف کرده و نمودار بالای محور x ها را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.	

۲) رسم نمودار تابع $y=af(bx+c)+d$ به کمک نمودار تابع $y=f(x)$

اگر نمودار تابع $y=f(x)$ را در اختیار داشته باشیم، برای رسم نمودار تابع $y=af(bx+c)+d$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

الف) تأثیرات روی دامنه:

۱- تأثیر عدد ثابت c: اگر $c>۰$ باشد، نمودار تابع را به اندازهٔ c واحد به سمت چپ و اگر $c<۰$ باشد نمودار تابع را به اندازهٔ c واحد به سمت راست می‌بریم.

۲- تأثیر ضریب x: طول تمامی نقاط را $\frac{۱}{|b|}$ ضرب می‌کنیم. (اگر b منفی باشه نمودار تابع رو نسبت به محور y هم قرینه می‌کنیم.)

ب) تأثیرات روی برد:

۳- تأثیر ضریب f: عرض تمامی نقاط را در $|a|$ ضرب می‌کنیم. (اگر a منفی باشه نمودار تابع رو نسبت به محور x ها هم قرینه می‌کنیم.)

۴- تأثیر عدد ثابت d: اگر $d>۰$ باشد نمودار تابع را به اندازهٔ d واحد به سمت بالا و اگر $d<۰$ باشد، نمودار تابع را به اندازهٔ d واحد به سمت پایین منتقل می‌کنیم.

۷ — ۱/۲۵

مصحح شو:

ابتدا ضابطهٔ تابع f را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=x^۳-۳x^۲+۳x-۳+۱-۱=(x-۱)^۳-۲ \ (۰/۲۵)$$

شبیه‌ساز امتحانات نهایی
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

حال x را برحسب y محاسبه می‌کنیم:

$$y=(x-1)^3-2\rightarrow y+2=(x-1)^3\ (0/25)\rightarrow x-1=\sqrt[3]{y+2}\ (0/25)$$

$$\rightarrow x=\sqrt[3]{y+2}+1\ (0/25)$$

سپس با تبدیل y به x، $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+2}+1\ (0/25)$$

۲۰ شو — ضابطهٔ تابع وارون:

برای به دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک مانند f، در معادلهٔ $y=f(x)$ در صورت امکان x را بر حسب y محاسبه می‌کنیم و سپس با تبدیل y به x، $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم.

۸ — ۳

مصحح شو:

ابتدا ضابطهٔ توابع f و g را به دست می‌آوریم. همان‌طور که مشخص است تابع f، تابعی خطی است که از دو نقطه به مختصات $(0,1)$ و $(-1,0)$ عبور کرده است، پس:

$$m=\frac{0-1}{-1-0}=1$$

$$y-y_.=m(x-x_.)\xrightarrow{(-1,0)}y=x+1\rightarrow f(x)=x+1\ (0/25)$$

از طرفی تابع g، یک تابع دو ضابطه‌ای است که برای $x<2$، خطی با شیب مثبت است که از دو نقطهٔ $(0,-1)$ و $(2,1)$ عبور می‌کند و برای $x\geq 2$، خطی با شیب منفی است که از دو نقطهٔ $(2,1)$ و $(3,0)$ می‌گذرد. بنابراین ضابطهٔ تابع g به صورت مقابل است.

$$g(x)=\begin{cases}-x+3\ ;\ x\geq 2\\ x-1\ \ ;\ x<2\end{cases}\ (0/5)$$

حال به کمک ضابطهٔ توابع f و g، به محاسبهٔ مقادیر خواسته شده می‌پردازیم:

الف)

$$(fog)(-1)=f(g(-1))\xrightarrow[(0/25)]{g(-1)=-2}f(-2)=-1\ (0/25)$$

ب) فرض می‌کنیم که $(gof)^{-1}(-2)=x$ باشد که در این صورت:

$$(gof)(x)=-2\rightarrow g(f(x))=-2$$

می‌دانیم که $f(x)=x+1$ و $g(x)=\begin{cases}-x+3\ ;\ x\geq 2\\ x-1\ \ ;\ x<2\end{cases}$ است، پس:

$$g(f(x))=\begin{cases}-f(x)+3\ ;\ f(x)\geq 2\\ f(x)-1\ \ ;\ f(x)<2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}-(x+1)+3\ ;\ x+1\geq 2\\ (x+1)-1\ \ ;\ x+1<2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}-x+2\ ;\ x\geq 1\\ x\ \ ;\ x<1\end{cases}\ (0/5)$$

ما به دنبال حل معادلهٔ $g(f(x))=-2$ هستیم، پس:

$$\begin{cases}x\geq 1\ ;\ -x+2=-2\rightarrow x=4\\ x<1\ ;\ x=-2\end{cases}\xrightarrow{(gof)^{-1}(-2)=x}\begin{cases}(gof)^{-1}(-2)=4\ \ (0/25)\\ (gof)^{-1}(-2)=-2\ (0/25)\end{cases}$$

پ) برای محاسبهٔ $(g^{-1}of^{-1})(0)=g^{-1}(f^{-1}(0))$، ابتدا فرض می‌کنیم که $f^{-1}(0)=x$ باشد:

$$f^{-1}(0)=x\rightarrow f(x)=0\xrightarrow{f(x)=x+1}x+1=0\rightarrow x=-1$$

پس $\underbrace{f^{-1}(0)=-1}_{(0/25)}$ است، پس $g^{-1}(f^{-1}(0))=g^{-1}(-1)$

به طریق مشابه اگر $g^{-1}(-1)=x$ باشد، در این صورت $g(x)=-1$ است، پس:

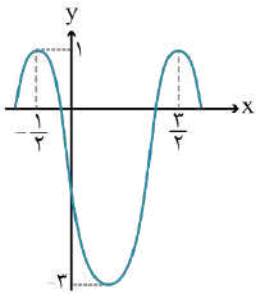
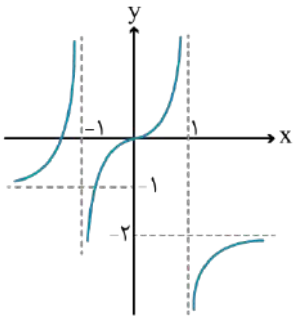
$$g(x)=-1\rightarrow\begin{cases}x\geq 2\ ;\ -x+3=-1\rightarrow x=4\\ x<2\ ;\ x-1=-1\rightarrow x=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}g^{-1}(-1)=4\\ g^{-1}(-1)=0\end{cases}$$

شبیه‌ساز امتحانات نهایی
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

	بنابراین: $\begin{cases} g^{-1}(f^{-1}(\cdot)) = g^{-1}(-1) = 4 & (\cdot/25) \\ g^{-1}(f^{-1}(\cdot)) = g^{-1}(-1) = \cdot & (\cdot/25) \end{cases}$ **راهنمای تصحیح:** اگر حاصل‌های خواسته شده به روش‌های دیگری نیز به دست بیاید، نمرهٔ کامل آن قسمت به دانش‌آموز تعلق می‌گیرد. **وارون ترکیب دو تابع:** اگر f و g توابعی وارون‌پذیر باشند در این صورت: $\begin{cases} (fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1} \\ (gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1} \end{cases}$	
۹	**مصحح شو:** ابتدا وارون تابع f را به دست می‌آوریم، برای این کار در تابع f جای مؤلفهٔ اول و دوم را عوض می‌کنیم: $f = \{(1,-1),(2,0),(-3,4),(-2,1)\} \to f^{-1} = \{(-1,1),(0,2),(4,-3),(1,-2)\}$ $(\cdot/25)$ حال به کمک $g = \{(0,2),(1,3),(-2,1),(2,3)\}$ تابع $f^{-1}og$ را تشکیل می‌دهیم: $(f^{-1}og)(0) = f^{-1}(g(0)) = f^{-1}(2)$: تعریف نشده $(\cdot/25)$ $(f^{-1}og)(1) = f^{-1}(g(1)) = f^{-1}(3)$: تعریف نشده $(\cdot/25)$ $(f^{-1}og)(-2) = f^{-1}(g(-2)) = f^{-1}(1) = -2$ $(\cdot/25)$ $(f^{-1}og)(2) = f^{-1}(g(2)) = f^{-1}(3)$: تعریف نشده $(\cdot/25)$ $\to f^{-1}og = \{(-2,-2)\}$ $(\cdot/25)$ حال به ازای دامنهٔ مشترک توابع g و $f^{-1}og$، داریم: $(f^{-1}og)+g = \{(-2,(-2+1))\} = \{(-2,-1)\}$ $(\cdot/25)$	۱/۷۵
	موفق باشید.	۲۰

شبیه‌ساز امتحانات نهایی
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **ریاضی ۳**	ساعت شروع:	تاریخ امتحان:	مدت امتحان: **۳۰ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	رشته: **علوم تجربی**	پایهٔ **دوازدهم** دورهٔ متوسطه	تعداد صفحات: **۲ صفحه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		**گروه آموزشی ماز**	

ردیف	سؤالات (پاسخ‌برگ دارد) [استفاده از ماشین حساب ساده مجاز می‌باشد]	نمره
۱	درستی یا نادرستی هریک از عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) دامنهٔ تابع $y=\tan x$ برابر $\left\{x \mid x\in\mathbb{R}\ ,\ x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}$ است. ب) اگر $A=\{x\in\mathbb{R}\mid\mid x-2\mid<1\}$ باشد، آن‌گاه مجموعهٔ A یک همسایگی راست ۱ است.	۱
۲	در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید. الف) باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)=2x^2-5x+1$ بر $(x-3)$، برابر ..... است. ب) حد تابع $f(x)=\frac{2x^5+6x-1}{x^3+4x}$ وقتی $x\to-\infty$ میل می‌کند، برابر ..... است.	۲
۳	دورهٔ تناوب، مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=\sqrt{3}-\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ را به‌دست آورید.	۱/۵
۴	نمودار مقابل مربوط به تابعی با ضابطهٔ $y=a\sin(bx)+c$ است. ضابطهٔ این تابع را مشخص کنید. 	۳/۲۵
۵	مقدار $\cos 22/5^\circ$ را به‌دست آورید.	۲
۶	معادلهٔ مثلثاتی $\cos 2x-\sin x+1=1$ را حل کنید.	۳
۷	نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت مقابل است. حاصل هریک از حدهای زیر را به‌دست آورید.  الف) $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)$ ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ پ) $\lim\limits_{x\to1^-} (fof)(x)$	۲/۲۵
	ادامهٔ سؤالات در صفحهٔ بعد	

شبیه‌ساز امتحانات نهایی
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **ریاضی ۳**	ساعت شروع:	تاریخ امتحان:	مدت امتحان: **۳۰ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	رشته: **علوم تجربی**	پایهٔ **دوازدهم** دورهٔ متوسطه	تعداد صفحات: **۲ صفحه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		**گروه آموزشی ماز**	

ردیف	سؤالات (پاسخ‌برگ دارد) [استفاده از ماشین حساب ساده مجاز می‌باشد]	نمره
۸	**حاصل هریک از حدهای زیر را در صورت وجود به‌دست آورید.** الف) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-۲}{۱-\cos x}$ ب) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}} \frac{[x]-۳}{\lvert ۲x-۱\rvert}$ پ) $\lim\limits_{x\to ۴} \frac{x^۲-۱۶}{\sqrt{x+۱۲}-x}$ ت) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{۳x+\sqrt{x^۲+x-۱}}{۷-۵x}$	۵
	موفق باشید.	۲۰

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **ریاضی ۳**	ساعت شروع:	تاریخ امتحان:	مدت امتحان: **۳۰ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	رشته: **علوم تجربی**	پایهٔ **دوازدهم** دورهٔ متوسطه	تعداد صفحات: **۷ صفحه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		**گروه آموزشی ماز**	

ردیف	پاسخ‌نامه	نمره
۱	مصحح شو: الف) درست (۰/۵) ب) نادرست (۰/۵) بررسی دقیق‌تر: ب) $A=\{x\in\mathbb{R}\mid \lvert x-۲\rvert<۱\}$ $\lvert x-۲\rvert<۱ \Rightarrow -۱<x-۲<۱ \xrightarrow{+۲} ۱<x<۳$	۱
۲	مصحح شو: الف) ۴ (۱) ب) $+\infty$ (۱) بررسی دقیق‌تر: الف) $R=f(۳)=۲(۳)^۲-۵(۳)+۱=۱۸-۱۵+۱=۴$ ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۲x^۵+۶x-۱}{x^۳+۴x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۲x^۵}{x^۳}=\lim\limits_{x\to-\infty} ۲x^۲=۲(-\infty)^۲=+\infty$ **۲۰ثانیه‌شو تقسیم چندجمله‌ای بر دوجمله‌ای درجهٔ اول:** در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر دوجمله‌ای درجهٔ اول $(ax+b)$، باقی‌ماندهٔ تقسیم برابر $f\left(-\frac{b}{a}\right)$ است. **نتیجه:** اگر $f\left(-\frac{b}{a}\right)=۰$ باشد، به این معنی است که $f(x)$ بر $(ax+b)$ بخش‌پذیر است. **مثال:** چندجمله‌ای $f(x)=۲x^۳+x^۲+۱$ بر دوجمله‌ای $(x+۱)$ بخش‌پذیر است چرا که $f(-۱)=۰$ است.	۲
۳	مصحح شو: $y=\sqrt{۳}-\cos\left(\frac{\pi}{۲}x\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{۲}x\right)+\sqrt{۳} \Rightarrow \begin{cases} a=-۱ \\ b=\frac{\pi}{۲} \\ c=\sqrt{۳} \end{cases}$ $T=\frac{۲\pi}{\lvert b\rvert}=\frac{۲\pi}{\lvert\frac{\pi}{۲}\rvert}=\frac{۴\pi}{\pi}=۴ \quad (۰/۵)$ $\max=\lvert a\rvert+c=\lvert-۱\rvert+\sqrt{۳}=\sqrt{۳}+۱ \quad (۰/۵) \qquad \min=-\lvert a\rvert+c=-\lvert-۱\rvert+\sqrt{۳}=\sqrt{۳}-۱ \quad (۰/۵)$ **راهنمای مصحح:** در این سؤال برای هر فرمول ۰/۲۵ نمره و برای پاسخ نهایی نیز ۰/۲۵ نمره تعلق می‌گیرد. **۲۰ثانیه‌شو دورهٔ تناوب، مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع مثلثاتی:** **نکتهٔ ۱:** در توابع مثلثاتی $y=a\sin(bx+d)+c$ و $y=a\cos(bx+d)+c$، داریم: بیش‌ترین مقدار $\lvert\sin$ یا $\cos\rvert$: ضریب $+$ مقدار ثابت $\Rightarrow \max=\lvert a\rvert+c$	۱/۵

شبیه‌ساز امتحانات نهایی
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

	کم‌ترین مقدار: $-\lvert\cos$ یا $\sin$ ضریب $+$ مقدار ثابت $\Rightarrow \min = -\lvert a\rvert + c$ دورهٔ تناوب $= \dfrac{۲\pi}{\lvert x \text{ ضریب}\rvert} \Rightarrow T = \dfrac{۲\pi}{\lvert b\rvert}$ **نکتهٔ ۲:** در تابع مثلثاتی $y = a\tan(bx)+c$ دورهٔ تناوب برابر است با: $T = \dfrac{\pi}{\lvert x \text{ ضریب}\rvert} \Rightarrow T = \dfrac{\pi}{\lvert b\rvert}$ **مثال:** $y = ۱ - ۲\sin\left(-\dfrac{\pi}{۳}x\right) \Rightarrow \begin{cases} T = \dfrac{۲\pi}{\lvert b\rvert} = \dfrac{۲\pi}{\lvert -\frac{\pi}{۳}\rvert} = ۶ \\ \max = \lvert a\rvert + c = \lvert -۲\rvert + ۱ = ۲ + ۱ = ۳ \\ \min = -\lvert a\rvert + c = -\lvert -۲\rvert + ۱ = -۲ + ۱ = -۱ \end{cases}$	
۳/۲۵	مصحح شو: با توجه به نمودار تابع $y = a\sin(bx)+c$: $\begin{cases} \text{دوره تناوب} = T = \dfrac{۳}{۲} - \left(-\dfrac{۱}{۲}\right) = ۲ \\ \text{بیشترین مقدار} = \max = ۱ \\ \text{کمترین مقدار} = \min = -۳ \\ f\left(-\dfrac{۱}{۲}\right) = ۱ \end{cases}$ $T = \dfrac{۲\pi}{\lvert b\rvert} = ۲ \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \dfrac{\pi}{\lvert b\rvert} = ۱ \Rightarrow \lvert b\rvert = \pi \Rightarrow b = \pm\pi \quad (۰/۵)$ $\begin{cases} \max = \lvert a\rvert + c = ۱ \quad (۰/۲۵) \\ \min = -\lvert a\rvert + c = -۳ \quad (۰/۲۵) \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} \lvert a\rvert = ۲ \Rightarrow a = \pm ۲ \quad (۰/۵) \\ c = -۱ \quad (۰/۵) \end{cases}$ با توجه به این‌که نمودار داده شده، شبیه نمودار تابع $y = -\sin x$ است لذا $ab < ۰$ بوده و ضابطهٔ آن به یکی از دو صورت زیر است: $y = a\sin(bx)+c \begin{cases} \xrightarrow[b=-\pi]{a=۲} y = ۲\sin(-\pi x) - ۱ \quad (۰/۵) \\ \xrightarrow[b=\pi]{a=-۲} y = -۲\sin(\pi x) - ۱ \quad (۰/۵) \end{cases}$	۴
۲	مصحح شو: $\cos^۲\alpha = \dfrac{۱+\cos ۲\alpha}{۲} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{۱+\cos ۲\alpha}{۲}} \quad (۰/۵)$ می‌دانیم که $\cos ۲۲/۵^\circ$، مثبت است، پس: $\cos ۲۲/۵^\circ = \sqrt{\dfrac{۱+\cos ۴۵^\circ}{۲}} \quad (۰/۵) \Rightarrow \cos ۲۲/۵^\circ = \sqrt{\dfrac{۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲}} \quad (۰/۵)$ $\cos ۲۲/۵^\circ = \sqrt{\dfrac{۲+\sqrt{۲}}{۴}} = \dfrac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲} \quad (۰/۵)$	۵

شبیه‌ساز امتحانات نهایی
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

روابط مثلثاتی زاویه‌های دو برابر کمان:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\begin{cases} \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = (\cos\alpha - \sin\alpha)(\cos\alpha + \sin\alpha) \\ \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \xrightarrow{\text{نتیجه}} \cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2} \\ \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \xrightarrow{\text{نتیجه}} \sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2} \end{cases}$$

مثال: مقدار عددی $\sin 15^\circ$ را محاسبه کنید.

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$$

می‌دانیم $\sin 15^\circ$ مثبت است، پس:

$$\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

به‌عنوان تمرین $\sin 22/5^\circ$ رو خودتون به‌دست بیارین!

---

۶ ۳

مصحح شو:

$$\cos 2x - \sin x + 1 = 1$$

می‌دانیم که $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ است، پس:

$$\left(1 - 2\sin^2 x\right) - \sin x + 1 = 1 \quad (0/25) \Rightarrow -2\sin^2 x - \sin x + 1 = 0 \quad (0/25)$$

$$\xrightarrow{\Delta=9} \begin{cases} \sin x = \dfrac{-(-1)+\sqrt{9}}{2(-2)} = \dfrac{1+3}{-4} = -1 \quad (0/5) \\ \sin x = \dfrac{-(-1)-\sqrt{9}}{2(-2)} = \dfrac{1-3}{-4} = \dfrac{1}{2} \quad (0/5) \end{cases}$$

$$\sin x = -1 = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \quad (0/5)$$

$$\sin x = \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{6} ;\ k \in \mathbb{Z} \quad (0/5) \\ x = 2k\pi + \pi - \dfrac{\pi}{6} = 2k\pi + \dfrac{5\pi}{6} ;\ k \in \mathbb{Z} \quad (0/5) \end{cases}$$

حل معادلات مثلثاتی:

معادلات مثلثاتی به فرم $\sin f(x) = \sin g(x)$:

$$\sin f(x) = \sin g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 2k\pi + g(x) \\ f(x) = 2k\pi + \pi - g(x) \end{cases}$$

حالت‌های خاص معادلات سینوسی:

معادله	جواب کلی
$\sin x = 0$	$x = k\pi$
$\sin x = 1$	$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$
$\sin x = -1$	$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

شبیه‌ساز امتحانات نهایی
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

مثال: معادلهٔ مثلثاتی $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{۳}}{۴}$ را حل کنید.

ابتدا طرفین معادله را در ۲ ضرب کرده و سپس به کمک رابطهٔ $\sin ۲x = ۲\sin x \cos x$ داریم:

$$۲\sin x \cos x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \sin ۲x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \sin ۲x = \sin \frac{\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳} \\ ۲x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۳} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ x = k\pi + \frac{\pi}{۳} \end{cases} \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

۷ — ۲/۲۵

مصحح شو:

الف) $\lim\limits_{x \to (-۱)^+} f(x) = -\infty$ (۰/۵)

ب) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -۱$ (۰/۵)

پ) برای محاسبهٔ $\lim\limits_{x \to ۱^-} (fof)(x)$ یا همان $\lim\limits_{x \to ۱^-} f(f(x))$، ابتدا از تابع درونی شروع می‌کنیم، به عبارت دیگر ابتدا باید $\lim\limits_{x \to ۱^-} f(x)$ را به‌دست آوریم که می‌شود:

$$\lim_{x \to ۱^-} f(x) = +\infty \quad (۰/۵)$$

سپس باید حاصل حد تابع بیرونی را زمانی که $x \to +\infty$ میل می‌کند به‌دست بیاوریم:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -۲ \quad (۰/۵)$$

در نتیجه:

$$\lim_{x \to ۱^-} (fof)(x) = -۲ \quad (۰/۲۵)$$

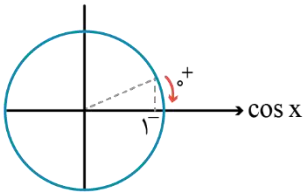
۸ — ۵

مصحح شو:

الف) $\lim\limits_{x \to ۰^+} \frac{-۲}{۱ - \cos x}$

می‌دانیم زمانی‌که $x \to ۰^+$ میل می‌کند $\cos x \to ۱^-$ میل خواهد کرد، پس:

$$\lim_{x \to ۰^+} \frac{-۲}{۱ - \cos x} = \underbrace{\frac{-۲}{۱ - ۱^-} = \frac{-۲}{۰^+}}_{(۰/۵)} = -\infty \quad (۰/۵)$$



ب) $\lim\limits_{x \to \frac{۱}{۲}} \frac{[x] - ۳}{|۲x - ۱|}$

ابتدا زمانی‌که $x \to \frac{۱}{۲}$ میل می‌کند، تکلیف جزء صحیح و قدرمطلق را مشخص می‌کنیم:

$$x \to \frac{۱}{۲} : \begin{cases} [x] = \left[\frac{۱}{۲}\right] = ۰ \\ |۲x - ۱| = ۰^+ \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to \frac{۱}{۲}} \frac{[x] - ۳}{|۲x - ۱|} = \underbrace{\frac{۰ - ۳}{۰^+} = \frac{-۳}{۰^+}}_{(۰/۵)} = -\infty \quad (۰/۵)$$

پ) $\lim\limits_{x \to ۴} \frac{x^۲ - ۱۶}{\sqrt{x + ۱۲} - x} = \frac{۰}{۰}$

شبیه‌ساز امتحانات نهایی

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

اگر $x=۴$ را در حد داده شده جایگذاری کنیم، به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌رسیم که برای رفع ابهام از آن، صورت و مخرج را در مزدوج عبارت مخرج ضرب می‌کنیم:

$$\underbrace{\lim_{x\to ۴}\frac{x^۲-۱۶}{\sqrt{x+۱۲}-x}\times\frac{\sqrt{x+۱۲}+x}{\sqrt{x+۱۲}+x}}_{(۰/۵)}=\lim_{x\to ۴}\frac{\left(x^۲-۱۶\right)\left(\sqrt{x+۱۲}+x\right)}{\left(\sqrt{x+۱۲}\right)^۲-x^۲}$$

$$\lim_{x\to ۴}\frac{\left(x^۲-۱۶\right)\left(\sqrt{x+۱۲}+x\right)}{\left(\sqrt{x+۱۲}\right)^۲-x^۲}=\lim_{x\to ۴}\frac{\left(x^۲-۱۶\right)\left(\sqrt{x+۱۲}+x\right)}{-x^۲+x+۱۲}\quad(۰/۲۵)$$

$$\lim_{x\to ۴}\frac{\cancel{(x-۴)}(x+۴)\left(\sqrt{x+۱۲}+x\right)}{-\cancel{(x-۴)}(x+۳)}=\lim_{x\to ۴}\frac{(x+۴)\left(\sqrt{x+۱۲}+x\right)}{-(x+۳)}\quad(۰/۲۵)$$

$$=\frac{(۴+۴)\left(\sqrt{۴+۱۲}+۴\right)}{-(۴+۳)}=\frac{۸\times ۸}{-۷}=-\frac{۶۴}{۷}\quad(۰/۵)$$

ت) $\lim_{x\to-\infty}\frac{۳x+\sqrt{x^۲+x-۱}}{۷-۵x}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۳x+\sqrt{x^۲+x-۱}}{۷-۵x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۳x+\sqrt{x^۲}}{-۵x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۳x+|x|}{-۵x}\quad(۰/۵)$$

می‌دانیم که اگر $x\to-\infty$ میل کند، $|x|=-x$ است، پس:

$$\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\frac{۳x-x}{-۵x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x}{-۵x}}_{(۰/۵)}=-\frac{۲}{۵}\quad(۰/۵)$$

الف) محاسبهٔ حد نامتناهی (حدِ بی‌نهایت):

در محاسبهٔ $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ ، اگر حد تابع صورت کسر، عددی مخالف صفر و حد تابع مخرج کسر، برابر صفر باشد، در این صورت حاصل حد، نامتناهی ($+\infty$ یا $-\infty$) خواهد بود.

توجه: برای تعیین علامت ∞ ، باید به علامت صورت و علامت مخرج کسر توجه کنیم.

$\frac{-\text{عدد}}{0^+}=-\infty$	$\frac{+\text{عدد}}{0^-}=-\infty$	$\frac{-\text{عدد}}{0^-}=+\infty$	$\frac{+\text{عدد}}{0^+}=+\infty$

مثال: حدود زیر را محاسبه کنید:

۱) $\lim_{x\to ۵^-}\frac{۲x}{x-۵}=\frac{۲\times ۵}{۵^--۵}=\frac{۱۰}{0^-}=-\infty$

۲) $\lim_{x\to-\frac{۱}{۲}}\frac{۴x+۱}{(۲x+۱)^۲}=\frac{۴\left(-\frac{۱}{۲}\right)+۱}{\left(۲\left(-\frac{۱}{۲}\right)+۱\right)^۲}=\frac{-۲+۱}{(-۱+۱)^۲}=\frac{-۱}{0^+}=-\infty$

ب) محاسبهٔ حد توابع شامل قدرمطلق و جزء صحیح:

وقتی به جزء صحیح و یا قدرمطلق برخورد کنیم، باید جزء صحیح را تعیین مقدار و قدرمطلق را تعیین علامت کنیم.

۱) $\lim_{x\to ۰^-}\frac{[x]}{\sin x}=\frac{\left[۰^-\right]}{۰^-}=\frac{-۱}{0^-}=+\infty$

شبیه‌ساز امتحانات نهایی
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲) $\lim\limits_{x\to ۳^-}\dfrac{[x]-۳}{x-۳}=\dfrac{[۳^-]-۳}{۳^--۳}=\dfrac{۲-۳}{۰^-}=\dfrac{-۱}{۰^-}=+\infty$

۳) $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{۲}{|x-۳|}=\dfrac{۲}{|۳-۳|}=\dfrac{۲}{۰^+}=+\infty$

۴) $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{۱}{۳}\right)}\dfrac{[x]}{|۳x+۱|}=\dfrac{\left[-\frac{۱}{۳}\right]}{\left|۳\left(-\frac{۱}{۳}\right)+۱\right|}=\dfrac{-۱}{۰^+}=-\infty$

پ) محاسبهٔ حد $\frac{۰}{۰}$:

در محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ اگر حد هر دو تابع f و g در $x=a$ برابر صفر باشد، به حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ خواهیم رسید و باید آن حد را به کمک عواملی نظیر اتحادها، گویا کردن و ... رفع ابهام کنیم.

در نوعی از سؤالات این حالت، صورت یا مخرج کسر (و یا گاهی هردو) شامل عبارت‌های رادیکالی است که برای رفع ابهام از آن، ابتدا باید صورت و مخرج کسر را در عبارت رادیکالی مناسب ضرب کنیم تا بتوانیم با استفاده از اتحاد مزدوج (و یا گاهی چاق و لاغر) عامل صفرکننده را شناسایی کرده و آن را از صورت و مخرج کسر حذف کنیم.

یادآوری:

$$\begin{cases}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=a-b\\ \left(\sqrt[۳]{a}\pm\sqrt[۳]{b}\right)\left(\sqrt[۳]{a^۲}\mp\sqrt[۳]{ab}+\sqrt[۳]{b^۲}\right)=a\pm b\end{cases}$$

مثال: حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{x^۲-۹}{۲-\sqrt{x+۱}}=\dfrac{۰}{۰}$

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{۲-\sqrt{x+۱}}\times\frac{۲+\sqrt{x+۱}}{۲+\sqrt{x+۱}}=\lim_{x\to ۳}\frac{\left(x^۲-۹\right)\left(۲+\sqrt{x+۱}\right)}{(۲)^۲-\left(\sqrt{x+۱}\right)^۲}=\lim_{x\to ۳}\frac{\left(x^۲-۹\right)\left(۲+\sqrt{x+۱}\right)}{۴-(x+۱)}$$

$$=\lim_{x\to ۳}\frac{(x+۳)\cancel{(x-۳)}\left(۲+\sqrt{x+۱}\right)}{-\cancel{(x-۳)}}=\lim_{x\to ۳}\left(-(x+۳)\left(۲+\sqrt{x+۱}\right)\right)=-۶\times ۴=-۲۴$$

۲) $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{x^۲-۵x+۶}{۲x^۲-۷x+۳}=\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{\cancel{(x-۳)}(x-۲)}{\cancel{(x-۳)}(۲x-۱)}=\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{x-۲}{۲x-۱}=\dfrac{۱}{۵}$

۳) $\lim\limits_{x\to -۱}\dfrac{\sqrt[۳]{x}+۱}{x^۲+۳x+۲}=\dfrac{۰}{۰}$

$$\lim_{x\to -۱}\frac{\sqrt[۳]{x}+۱}{x^۲+۳x+۲}\times\frac{\sqrt[۳]{x^۲}-\sqrt[۳]{x}+۱}{\sqrt[۳]{x^۲}-\sqrt[۳]{x}+۱}=\lim_{x\to -۱}\frac{\cancel{x+۱}}{\cancel{(x+۱)}(x+۲)\left(\sqrt[۳]{x^۲}-\sqrt[۳]{x}+۱\right)}$$

$$=\lim_{x\to -۱}\frac{۱}{(x+۲)\left(\sqrt[۳]{x^۲}-\sqrt[۳]{x}+۱\right)}=\frac{۱}{۱\times(۳)}=\frac{۱}{۳}$$

شبیه ساز امتحانات نهایی
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

ت) محاسبهٔ حد در بی‌نهایت در توابع گویا:

در محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{ax^n+bx^{n-1}+\cdots}{a'x^m+b'x^{m-1}+\cdots}$; $(m,n\in\mathbb{N})$ ، حد عبارت صورت و مخرج کسر به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کند که در این‌صورت با حالت مبهم $\dfrac{\infty}{\infty}$ مواجه خواهیم بود که برای رفع ابهام از آن در صورت و مخرج کسر، جمله با بیش‌ترین توان را نگه داشته و مابقی جملات را حذف می‌کنیم، سپس با توجه به جدول زیر حاصل حد را محاسبه می‌کنیم:

نوع	حاصل حد
درجهٔ عبارت صورت از درجهٔ عبارت مخرج بیش‌تر باشد.	$+\infty$ یا $-\infty$
درجهٔ عبارت صورت با درجهٔ عبارت مخرج برابر باشد.	$\dfrac{a}{a'}$
درجهٔ عبارت صورت از درجهٔ عبارت مخرج کم‌تر باشد.	صفر

مثال: حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-5x+1}{6x^3-11x^2-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{6x^3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x^7+5x^2}{2x^3+9}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x^7}{2x^3}=\lim_{x\to-\infty}\left(-2x^4\right)=-2(-\infty)^4=-2(+\infty)=-\infty$$

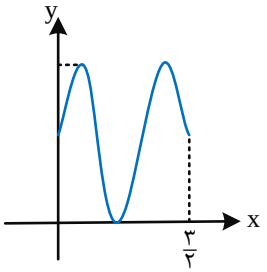
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x+4}{x^3+x-8}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{x^2}=\frac{5}{(-\infty)^2}=\frac{5}{+\infty}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x}-5}=\frac{3+\frac{1}{+\infty}}{\frac{4}{+\infty}-5}=\frac{3+0}{0-5}=-\frac{3}{5}$$

موفق باشید.

شبیه‌ساز امتحانات نهایی
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

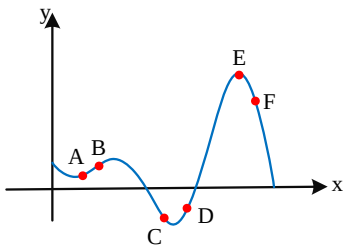
آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **ریاضی ۳**	ساعت شروع:	تاریخ امتحان:	مدت امتحان: **۴۰ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	رشته: **علوم تجربی**	پایهٔ **دوازدهم** دورهٔ متوسطه	تعداد صفحات: **۲ صفحه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی	**گروه آموزشی ماز**		

ردیف	سؤالات (پاسخ‌برگ دارد) [استفاده از ماشین حساب ساده مجاز می‌باشد]	نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) اگر $f(x)=\frac{۱}{۸}x-۳$ و $g(x)=x^۳$ باشد، آن‌گاه مقدار $(g^{-۱}of^{-۱})(۵)$ برابر ۴ است. ب) اگر انتهای کمان α در ناحیهٔ چهارم مثلثاتی باشد، آن‌گاه $\tan\alpha>\sin\alpha$ است. پ) خط $y=-\frac{۱}{۲}$ نمودار تابع $y=\cos ۲x$ را در فاصلهٔ $[۰,\pi]$ در دو نقطه قطع می‌کند.	۱/۵
۲	در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید. الف) نقطهٔ $(-۲,۴)$ روی نمودار تابع $y=f(x)$ می‌باشد. نقطهٔ متناظر آن روی نمودار تابع $y=-۲f(\frac{۱}{۲}x)$ به‌صورت ..... است. ب) مقدار عددی عبارت $\sin ۲۲/۵^\circ\cos ۲۲/۵^\circ$ برابر ..... است. پ) دورهٔ تناوب تابع $y=-۲\tan ۳x$ برابر ..... است.	۱/۵
۳	نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\lvert x-۱\rvert$ را ابتدا دو واحد به سمت راست و سپس یک واحد به سمت پایین منتقل می‌کنیم و در مرحلهٔ آخر نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم. نمودار تابع در هر مرحله را رسم کرده و ضابطه آن‌ها را نیز بنویسید.	۳
۴	اگر $f(x)=\log_۵^{(۱-x)}$ و $g(x)=\frac{x^۲-۴x+۳}{x-۱}$ باشد، دامنهٔ تابع fog را بیابید.	۱/۵
۵	اگر $\sin\alpha=\frac{۳}{۵}$ و انتهای کمان α در ناحیهٔ دوم دایرهٔ مثلثاتی باشد، حاصل $\tan ۲\alpha$ را به‌دست آورید.	۱/۷۵
۶	معادلهٔ مثلثاتی $۲\sin^۲x-۳\sin x+۱=۰$ را حل کنید.	۱/۵
۷	نمودار زیر قسمتی از نمودار تابع $y=a\cos(\pi(bx-\frac{۳}{۲}))-c$ است. حاصل abc را بیابید. 	۳
۸	حاصل حدهای زیر را در صورت وجود به‌دست آورید. الف) $\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{(۲-[x])\sqrt{x^۲+۲x+۱}}{x+۱}$ ب) $\lim_{x\to(\frac{۲\pi}{۳})^+}\frac{\sin x}{۱+۲\cos x}$ پ) $\lim_{x\to۳}\frac{\sqrt[۳]{x-۲}-۱}{x^۲-۹}$ توجه: به روش‌های هوپیتال و هم ارزی نمره تعلق نمی‌گیرد.	۱/۷۵
	ادامهٔ سؤالات در صفحهٔ بعد	

شبیه‌ساز امتحانات نهایی

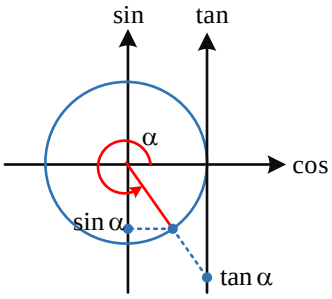
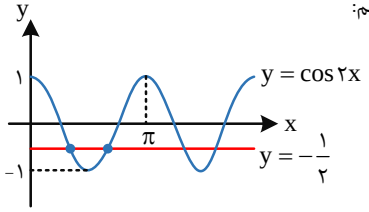
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **ریاضی ۳**	ساعت شروع:	تاریخ امتحان:	مدت امتحان: **۴۰ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	رشته: **علوم تجربی**	پایهٔ **دوازدهم** دورهٔ متوسطه	تعداد صفحات: **۲ صفحه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		**گروه آموزشی ماز**	

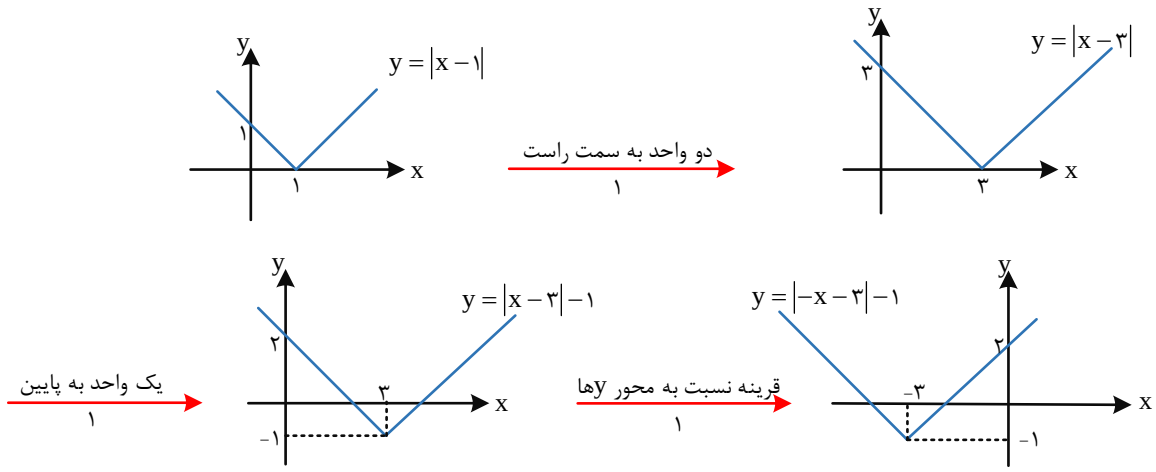
ردیف	سؤالات (پاسخ‌برگ دارد) [استفاده از ماشین حساب ساده مجاز می‌باشد]	نمره
۹	اگر $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۴x^n-۳x^۲-۱}{ax^۳+۵x^۲+۱}=-۲$ باشد، حاصل $a+n$ را به‌دست آورید.	۱
۱۰	با فرض $f(x)=\sqrt{x+۱}$، مطلوب است: الف) با استفاده از تعریف مشتق، حاصل $f'(x)$ را به‌دست آورید. ب) معادلهٔ خط مماس بر منحنی تابع f در نقطه‌ای به طول $x=۳$ واقع بر آن را بنویسید.	۲
۱۱	نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید.  نقطه / شیب: -۳، -۱، ۰، $\frac{۱}{۲}$، ۱، ۲	۱/۵
	موفق باشید.	۲۰

شبیه‌ساز امتحانات نهایی
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **ریاضی ۳**	ساعت شروع:	تاریخ امتحان:	مدت امتحان: **۴۰ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	رشته: **علوم تجربی**	پایهٔ **دوازدهم** دورهٔ متوسطه	تعداد صفحات: **۱۱ صفحه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		**گروه آموزشی ماز**	

ردیف	پاسخ‌نامه	نمره
۱	مصحح شو: الف) درست (۰/۵) ب) نادرست (۰/۵) پ) درست (۰/۵) بررسی دقیق‌تر: الف) ابتدا ضابطهٔ وارون توابع f و g را به‌دست می‌آوریم: راه‌حل اول: $\begin{cases} f(x)=\frac{1}{8}x-3 \Rightarrow f^{-1}(x)=8(x+3) \\ g(x)=x^3 \Rightarrow g^{-1}(x)=\sqrt[3]{x} \end{cases}$ حال، حاصل‌خواسته شده برابر است با: $(g^{-1}of^{-1})(5)=g^{-1}(f^{-1}(5))$ $f^{-1}(5)=8(5+3)=64 \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(5))=g^{-1}(64)$ $g^{-1}(64)=\sqrt[3]{64}=4 \Rightarrow (g^{-1}of^{-1})(5)=4$ راه‌حل دوم: می‌دانیم که اگر f تابعی وارون‌پذیر باشد، داریم: $f^{-1}(a)=b \Leftrightarrow f(b)=a$ از طرفی، برای محاسبهٔ $(g^{-1}of^{-1})(5)=g^{-1}(f^{-1}(5))$، ابتدا باید $f^{-1}(5)$ را به‌دست بیاوریم اما با توجه به رابطهٔ فوق، به‌جای محاسبهٔ $f^{-1}(5)$، حاصل $f(x)=5$ را به‌دست می‌آوریم: $f(x)=\frac{1}{8}x-3 \Rightarrow \frac{1}{8}x-3=5 \Rightarrow x=64 \Rightarrow f(64)=5 \Leftrightarrow f^{-1}(5)=64$ حال، باید حاصل $g^{-1}(64)$ را به‌دست بیاوریم که به طریق مشابه داریم: $g(x)=x^3 \Rightarrow x^3=64 \Rightarrow x=4 \Rightarrow g(4)=64 \Leftrightarrow g^{-1}(64)=4$ بنابراین: $g^{-1}(f^{-1}(5))=g^{-1}(64)=4$ ب) می‌دانیم که انتهای کمان α در ناحیهٔ چهارم دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد، پس:  $\sin\alpha > \tan\alpha$ پ) می‌دانیم که دورهٔ تناوب تابع $y=\cos ax$ برابر $T=\frac{2\pi}{|a|}$ است، پس: $y=\cos 2x \Rightarrow T=\frac{2\pi}{|2|}=\pi$ حال نمودار هر دو تابع $y=\cos 2x$ و $y=-\frac{1}{2}$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:  همان‌طور که می‌بینید خط $y=-\frac{1}{2}$ نمودار تابع $y=\cos 2x$ را در فاصلهٔ $[0,\pi]$ در دو نقطه قطع می‌کند.	۱/۵

شبیه‌ساز امتحانات نهایی
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲	مصحح شو: الف) $(-۴,-۸)$ (۰/۵)　　ب) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ (۰/۵)　　پ) $\frac{\pi}{۳}$ (۰/۵) بررسی دقیق‌تر: الف) می‌دانیم که اگر نقطهٔ $A(x,y)$ روی نمودار تابع $y=f(x)$ قرار داشته باشد، نقطهٔ $A'(\frac{x-c}{b},ay+d)$ بر روی نمودار $y=af(bx+c)+d$ قرار دارد. از طرفی، طبق گفتهٔ سوال، نقطهٔ $(-۲,۴)$ روی نمودار تابع $f(x)$ قرار دارد، بنابراین نقطهٔ متناظر این نقطه روی نمودار تابع $y=-۲f(\frac{۱}{۲}x)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید: $A'(\frac{-۲-۰}{\frac{۱}{۲}},(-۲\times۴)+۰)\Rightarrow A'(-۴,-۸)$ ب) با توجه به رابطهٔ $\sin ۲x=۲\sin x\cos x$ داریم: $\sin ۲۲/۵^\circ\cos ۲۲/۵^\circ=\frac{\sin ۴۵^\circ}{۲}=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲}=\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ پ) می‌دانیم که دورهٔ تناوب تابع $y=a\tan(bx+c)+d$ به‌صورت $T=\frac{\pi}{\lvert b\rvert}$ است، در نتیجه: $y=-۲\tan ۳x\Rightarrow T=\frac{\pi}{\lvert ۳\rvert}=\frac{\pi}{۳}$	۱/۵
۳	مصحح شو: ابتدا نمودار تابع $f(x)=\lvert x-۱\rvert$ را رسم می‌کنیم و سپس تغییرات گفته شده را اعمال می‌کنیم:  **راهنمای مصحح:** در هر یک از تبدیلات، ۰/۵ نمره برای رسم شکل و ۰/۵ نمره برای نوشتن ضابطهٔ آن مرحله در نظر گرفته شود. (مجموعاً ۳ نمره)	۳

شبیه‌ساز امتحانات نهایی
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

تبدیل و انتقال نمودار:

نمودار جدید $(a,k>0)$	توضیحات و نحوهٔ رسم	
$f(x+a)$	نمودار تابع f را به اندازهٔ a واحد در راستای محور xها به سمت چپ منتقل می‌کنیم.	
$f(x-a)$	نمودار تابع f را به اندازهٔ a واحد در راستای محور xها به سمت راست منتقل می‌کنیم.	
$f(x)+a$	نمودار تابع f را به اندازهٔ a واحد در راستای محور yها به سمت بالا منتقل می‌کنیم.	
$f(x)-a$	نمودار تابع f را به اندازهٔ a واحد در راستای محور yها به سمت پایین منتقل می‌کنیم.	
$f(-x)$	نمودار تابع f را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم.	
$-f(x)$	نمودار تابع f را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.	
$-f(-x)$	نمودار تابع f را ابتدا نسبت به محور xها و سپس نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم. (قرینه نسبت به مبدأ)	
$f(kx)$	$k>1$	نمودار تابع f را در راستای محور xها با ضریب $\frac{1}{k}$ منقبض (فشرده) می‌کنیم.
	$0<k<1$	نمودار تابع f را در راستای محور xها با ضریب $\frac{1}{k}$ منبسط (کشیده) می‌کنیم.
$kf(x)$	$k>1$	نمودار تابع f را در راستای محور yها با ضریب k منبسط (کشیده) می‌کنیم.
	$0<k<1$	نمودار تابع f را در راستای محور yها با ضریب k منقبض (فشرده) می‌کنیم.
$\lvert f(x)\rvert$	ابتدا نمودار تابع f را رسم کرده و سپس هر آن‌چه زیر محور xها قرار دارد را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.	
$f(\lvert x\rvert)$	ابتدا نمودار تابع f را رسم کرده و سپس هر آن‌چه سمت چپ محور yها قرار دارد را حذف کرده و به‌جای آن نمودار سمت راست محور yها را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم.	
$\lvert y\rvert=f(x)$	ابتدا نمودار $y=f(x)$ را رسم کرده و سپس هر آن‌چه زیر محور xها قرار دارد را حذف کرده و نمودار بالای محور xها را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.	

۴ — ۱/۵

مصحح شو:

ابتدا دامنهٔ توابع f و g را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f(x)=\log_{5}^{(1-x)} \quad ; 1-x>0 \Rightarrow x<1 \Rightarrow D_f=(-\infty,1) \\ g(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x-1} \; ; x-1=0 \Rightarrow x=1 \rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{1\} \end{cases}$$

حال دامنهٔ تابع fog را به‌دست می‌آوریم.

$$\underbrace{D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}}_{(0/5)} \Rightarrow D_{fog}=\left\{x\in \mathbb{R}-\{1\} \mid \frac{x^2-4x+3}{x-1}\in(-\infty,1)\right\}$$

$$\Rightarrow D_{fog}=\left\{x\neq 1 \mid \frac{x^2-4x+3}{x-1}<1\right\} \; (0/5)$$

$$\frac{x^2-4x+3}{x-1}<1 \Rightarrow \frac{(x-1)(x-3)}{x-1}<1 \xrightarrow{x\neq 1} x-3<1 \Rightarrow x<4$$

$$\begin{cases} x<4 \\ x\neq 1 \end{cases} \Rightarrow D_{fog}=(-\infty,1)\cup(1,4) \quad (0/5)$$

تذکر: دامنهٔ تابع fog رو می‌تونی به‌صورت $(-\infty,4)-\{1\}$ هم بنویسی!

محاسبهٔ دامنهٔ توابع لگاریتمی:

برای به‌دست آوردن دامنهٔ تابع لگاریتمی $y=\log_{g(x)}^{f(x)}$ باید شروط زیر را بررسی کنیم:

$*f(x)>0$ $\quad *g(x)>0$ $\quad *g(x)\neq 1$

شیب ساز امتحانات نهایی
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

محاسبهٔ دامنهٔ توابع گویا:

برای پیدا کردن دامنهٔ توابع گویا به فرم $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ توابع چندجمله‌ای هستند، ریشه(های) عبارت مخرج کسر را (در صورت وجود) پیدا کرده و آن‌ها را از مجموعهٔ اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) حذف می‌کنیم. به‌عبارت دیگر:

$D_f=\mathbb{R}-\{x|Q(x)=0\}=\mathbb{R}-\{\text{ریشه(های) مخرج کسر}\}$

محاسبهٔ دامنهٔ توابع مرکب:

$D_{fog}=\{x\in D_g\,|\,g(x)\in D_f\}$

$D_{gof}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_g\}$

۵ — ۱/۷۵

مصحح شو:

می‌دانیم که $\sin\alpha=\frac{۳}{۵}$ است، پس:

$\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱\Rightarrow\cos\alpha=\pm\sqrt{۱-\sin^۲\alpha}=\pm\sqrt{۱-\frac{۹}{۲۵}}=\pm\frac{۴}{۵}$ (۰/۲۵)

از طرفی، انتهای کمان α در ناحیهٔ دوم دایرهٔ مثلثاتی است، پس $\cos\alpha<0$ بوده و $\cos\alpha=-\frac{۴}{۵}$ قابل قبول است. حال به کمک روابط مثلثاتی دو برابر کمان داریم:

$\sin۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha$ (۰/۲۵) $\Rightarrow\sin۲\alpha=۲\times(\frac{۳}{۵})\times(-\frac{۴}{۵})=-\frac{۲۴}{۲۵}$ (۰/۲۵)

$\cos۲\alpha=\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha$ (۰/۲۵) $\Rightarrow\cos۲\alpha=(-\frac{۴}{۵})^۲-(\frac{۳}{۵})^۲=\frac{۱۶}{۲۵}-\frac{۹}{۲۵}=\frac{۷}{۲۵}$ (۰/۲۵)

راهنمای مصحح: اگر مقدار $\cos۲\alpha$ به کمک روابط $\cos۲\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha$ یا $\cos۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱$ نیز به‌دست بیاید، به این قسمت نمره تعلق می‌گیرد.

$\tan۲\alpha=\frac{\sin۲\alpha}{\cos۲\alpha}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow\tan۲\alpha=\frac{-\frac{۲۴}{۲۵}}{\frac{۷}{۲۵}}=-\frac{۲۴}{۷}$ (۰/۲۵)

روابط مثلثاتی مهم:

$*\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱\Rightarrow\begin{cases}\sin\alpha=\pm\sqrt{۱-\cos^۲\alpha}\\ \cos\alpha=\pm\sqrt{۱-\sin^۲\alpha}\end{cases}$

$*\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\quad$ $*\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$*۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\;;\;\cos\alpha\neq0$

$*۱+\cot^۲\alpha=\frac{۱}{\sin^۲\alpha}\;;\;\sin\alpha\neq0$

$*\tan\alpha\times\cot\alpha=۱\;;\;\alpha\neq\frac{k\pi}{۲}$

$*\sin۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha$

$*\cos۲\alpha=\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha\xrightarrow{\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱}\begin{cases}\cos۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱\\ \cos۲\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha\end{cases}$

شبیه‌ساز امتحانات نهایی
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۶

مصحح شو:

ابتدا با تغییر متغیر $\sin x = t$، معادلهٔ مثلثاتی را به یک معادلهٔ درجه دوم تبدیل کرده و آن را حل می‌کنیم:

$$۲\sin^۲ x - ۳\sin x + ۱ = ۰ \xrightarrow{\sin x = t} \underbrace{۲t^۲ - ۳t + ۱ = ۰}_{(۰/۲۵)} \xrightarrow{a+b+c=۰} \begin{cases} t = \sin x = ۱ & (۰/۲۵) \\ t = \sin x = \frac{۱}{۲} & (۰/۲۵) \end{cases}$$

$$\sin x = ۱ \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} ; k \in \mathbb{Z} \qquad (۰/۲۵)$$

$$\sin x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} & ; k \in \mathbb{Z} \ (۰/۲۵) \\ x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۶} & ; k \in \mathbb{Z} \ (۰/۲۵) \end{cases}$$

حل معادله‌های مثلثاتی:

الف) معادلات مثلثاتی به فرم $\sin f(x) = \sin g(x)$:

$$\sin f(x) = \sin g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = ۲k\pi + g(x) \\ f(x) = ۲k\pi + \pi - g(x) \end{cases}$$

حالت‌های خاص معادلات سینوسی:

معادله	جواب کلی
$\sin x = ۰$	$x = k\pi$
$\sin x = ۱$	$x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$
$\sin x = -۱$	$x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲}$

ب) معادلات مثلثاتی به فرم $\cos f(x) = \cos g(x)$:

$$\cos f(x) = \cos g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = ۲k\pi + g(x) \\ f(x) = ۲k\pi - g(x) \end{cases}$$

حالت‌های خاص معادلات کسینوسی:

معادله	جواب کلی
$\cos x = ۰$	$x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$
$\cos x = ۱$	$x = ۲k\pi$
$\cos x = -۱$	$x = (۲k+۱)\pi$

مثال: معادلهٔ مثلثاتی $\sin ۲x = \sin x$ را حل کنید.

$$\begin{cases} ۲x = ۲k\pi + x \\ ۲x = ۲k\pi + \pi - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۳}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

مثال: معادلهٔ مثلثاتی $\cos ۲\alpha - \sin \alpha + ۱ = ۱$ را حل کرده و جواب‌های کلی آن را بنویسید.

می‌دانیم که $\cos ۲\alpha = ۱ - ۲\sin^۲ \alpha$ است، پس:

$$(۱ - ۲\sin^۲ \alpha) - \sin \alpha + ۱ = ۱ \Rightarrow ۲\sin^۲ \alpha + \sin \alpha - ۱ = ۰$$

۱/۵

شبیه‌ساز امتحانات نهایی
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

$$\xrightarrow[a+c=b]{\text{حل معادله}}\begin{cases}\sin\alpha=-1\Rightarrow\alpha=2k\pi-\frac{\pi}{2}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\\ \sin\alpha=\frac{1}{2}\Rightarrow\sin\alpha=\sin\frac{\pi}{6}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=2k\pi+\frac{\pi}{6}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\\ \alpha=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\end{cases}$$

مثال: معادلهٔ مثلثاتی $\sin x\cos x=\frac{\sqrt{3}}{4}$ را حل کنید.

ابتدا طرفین معادله را در ۲ ضرب کرده و سپس به کمک رابطهٔ $\sin 2x=2\sin x\cos x$ داریم:

$$2\sin x\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\sin 2x=\sin\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2x=2k\pi+\frac{\pi}{3}\\ 2x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=k\pi+\frac{\pi}{6}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=k\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

مثال: معادلهٔ مثلثاتی $\cos x(2\cos x-9)=5$ را حل کنید.

$$2\cos^2 x-9\cos x-5=0\xrightarrow{\text{حل معادله}}\begin{cases}\cos x=5\xrightarrow{-1\le\cos x\le 1}\text{غ ق ق}\\ \cos x=-\frac{1}{2}\Rightarrow\cos x=\cos\frac{2\pi}{3}\Rightarrow\begin{cases}x=2k\pi+\frac{2\pi}{3}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=2k\pi-\frac{2\pi}{3}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\end{cases}$$

مثال: معادلهٔ مثلثاتی $\cos 2x-\cos x+1=0$ را حل کنید.

می‌دانیم که $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ است، پس:

$$\cos 2x-\cos x+1=0\Rightarrow(2\cos^2 x-1)-\cos x+1=0\Rightarrow 2\cos^2 x-\cos x=0$$

$$\Rightarrow\cos x(2\cos x-1)=0\Rightarrow\begin{cases}\cos x=0\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\\ \cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow\cos x=\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

۷ — ۳

مصحح شو:

ابتدا معادلهٔ مثلثاتی داده شده را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$y=a\cos(\pi(bx-\frac{3}{2}))-c=a\cos(b\pi x-\frac{3\pi}{2})-c\quad(0/25)$$

می‌دانیم که $\cos(-\bigcirc)=\cos\bigcirc$ و $\cos(\frac{3\pi}{2}-\bigcirc)=-\sin\bigcirc$ است، پس:

$$y=-a\sin(b\pi x)-c\quad(0/5)$$

از طرفی، با توجه به نمودار داده‌شده داریم:

$$\begin{cases}\min=0\Rightarrow-|a|+(-c)=0\ (0/25)\Rightarrow c=-|a|\ (0/25)\\ \max=2\Rightarrow|a|+(-c)=2(0/25)\xrightarrow{c=-|a|}2|a|=2\Rightarrow|a|=1\ (0/25)\Rightarrow c=-1\ (0/25)\\ 1/5T=\frac{3}{2}\Rightarrow T=1\Rightarrow\frac{2\pi}{|b\pi|}=1\ (0/25)\Rightarrow|b|=2\ (0/25)\end{cases}$$

با توجه به نمودار تابع، ab باید عددی منفی باشد، بنابراین $ab=-2$ (۰/۲۵) و در نتیجه: $abc=2$ (۰/۲۵)

شبیه‌ساز امتحانات نهایی

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

نمودار توابع مثلثاتی:

نکتهٔ ۱: در توابع مثلثاتی $y = a\sin(bx+d)+c$ و $y = a\cos(bx+d)+c$ داریم:

بیش‌ترین مقدار: $\max = |a| + c \Leftarrow$ مقدار ثابت $+$ |ضریب sin یا cos|

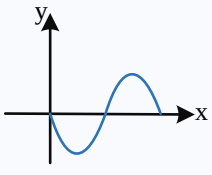
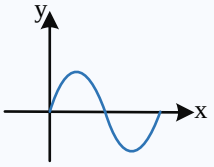
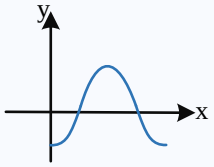
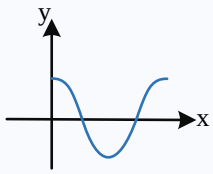
کم‌ترین مقدار: $\min = -|a| + c \Leftarrow$ مقدار ثابت $+$ $-$|ضریب sin یا cos|

$$\text{دوره تناوب} = \frac{۲\pi}{|\text{ضریب } x|} \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{|b|}$$

نکتهٔ ۲: در تابع مثلثاتی $y = a\tan(bx)+c$ دورهٔ تناوب برابر است با:

$$T = \frac{\pi}{|\text{ضریب } x|} \Rightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$$

نکتهٔ ۳: ریخت‌شناسی توابع مثلثاتی $y = a\sin bx$ و $y = a\cos bx$:

$y = a\sin bx$		$y = a\cos bx$	
$ab < ۰$	$ab > ۰$	$a < ۰$	$a > ۰$
			

۸ — مصحح شو: — ۱/۷۵

الف) $\lim\limits_{x\to(-۱)^-} \frac{(۲-[x])\sqrt{x^۲+۲x+۱}}{x+۱} = \lim\limits_{x\to(-۱)^-} \frac{(۲-[x])\times\sqrt{(x+۱)^۲}}{x+۱} = \lim\limits_{x\to(-۱)^-} \frac{(۲-[x])|x+۱|}{x+۱}$ (۰/۲۵)

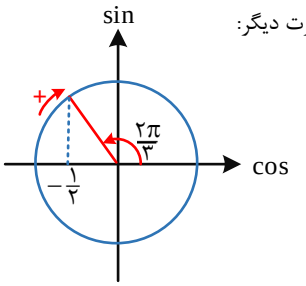
تکلیف براکت و قدرمطلق را زمانی که $x\to(-۱)^-$ ، مشخص می‌کنیم:

$$x\to(-۱)^- : \begin{cases} [x] = \left[(-۱)^-\right] = -۲ \\ |x+۱| = -(x+۱) \end{cases}$$

$$\lim_{x\to(-۱)^-} \frac{(۲-[x])|x+۱|}{x+۱} = \underbrace{\lim_{x\to(-۱)^-} \frac{-۴(x+۱)}{x+۱}}_{(۰/۲۵)} = -۴ \quad (۰/۲۵)$$

ب) $\lim\limits_{x\to(\frac{۲\pi}{۳})^+} \frac{\sin x}{۱+۲\cos x}$

با توجه به دایرهٔ مثلثاتی زیر، می‌توان نتیجه گرفت زمانی که x با مقادیر بزرگ‌تر از $\frac{۲\pi}{۳}$ به $\frac{۲\pi}{۳}$ نزدیک می‌شود، $\cos x$ با مقادیر کمتر از $-\frac{۱}{۲}$ به $-\frac{۱}{۲}$ نزدیک خواهد شد، به‌عبارت دیگر:



$$x\to(\frac{۲\pi}{۳})^+ : \cos x\to(-\frac{۱}{۲})^- \Rightarrow \cos x < -\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲\cos x < -۱ \Rightarrow ۱+۲\cos x < ۰$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to(\frac{۲\pi}{۳})^+} \frac{\sin x}{۱+۲\cos x} = \underbrace{\frac{\sin\frac{۲\pi}{۳}}{۰^-} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۰^-}}_{(۰/۲۵)} = -\infty \quad (۰/۲۵)$$

پ) $\lim\limits_{x\to۳} \frac{\sqrt[۳]{x-۲}-۱}{x^۲-۹} = \frac{۰}{۰}$

شبیه‌ساز امتحانات نهایی
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ابتدا صورت و مخرج کسر را در $\sqrt[3]{(x-2)^2}+\sqrt[3]{x-2}+1$ ضرب می‌کنیم:

$$\underbrace{\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{x-2}-1}{x^2-9}\times\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}+\sqrt[3]{x-2}+1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}+\sqrt[3]{x-2}+1}}_{(0/25)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)-1}{(x^2-9)\times\left(\sqrt[3]{(x-2)^2}+\sqrt[3]{x-2}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x+3)\times 3}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x+3)\times 3}=\frac{1}{6\times 3}=\frac{1}{18}\ (0/25)$$

الف) محاسبهٔ حد توابع شامل قدرمطلق و جزء صحیح:

وقتی به جزء صحیح و یا قدرمطلق برخورد کنیم، باید جزء صحیح را تعیین مقدار و قدرمطلق را تعیین علامت کنیم:

$$*\ \lim_{x\to 0^-}\frac{[x]}{\sin x}=\frac{\left[0^-\right]}{0^-}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$$

$$*\ \lim_{x\to 3^-}\frac{[x]-3}{x-3}=\frac{\left[3^-\right]-3}{3^--3}=\frac{2-3}{0^-}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$$

$$*\ \lim_{x\to 3}\frac{2}{|x-3|}=\frac{2}{|3-3|}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

$$*\ \lim_{x\to(-\frac{1}{3})}\frac{[x]}{|3x+1|}=\frac{\left[-\frac{1}{3}\right]}{\left|3(-\frac{1}{3})+1\right|}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

ب) محاسبهٔ حد بی‌نهایت در توابع کسری:

در محاسبهٔ $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ ، اگر حد تابع صورت کسر عددی مخالف صفر و حد تابع مخرج کسر برابر صفر باشد، در این‌صورت، حاصل حد، نامتناهی($+\infty$ یا $-\infty$) خواهد بود.

توجه: برای تعیین علامت ∞ ، باید به علامت صورت و علامت مخرج کسر توجه کنیم.

$\frac{+\text{عدد}}{0^+}=+\infty$	$\frac{-\text{عدد}}{0^-}=+\infty$	$\frac{+\text{عدد}}{0^-}=-\infty$	$\frac{-\text{عدد}}{0^+}=-\infty$

مثال: حدود زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim_{x\to 5^-}\frac{2x}{x-5}=\frac{2\times 5}{5^--5}=\frac{10}{0^-}=-\infty$

۲) $\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{4x+1}{(2x+1)^2}=\frac{4(-\frac{1}{2})+1}{\left(2(-\frac{1}{2})+1\right)^2}=\frac{-2+1}{(-1+1)^2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$

پ) رفع ابهام $\frac{0}{0}$ در توابع کسری:

در محاسبهٔ $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ اگر حد هر دو تابع f و g در $x=a$ برابر صفر باشد به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ خواهیم رسید و باید آن حد را به کمک عواملی نظیر اتحادها، گویا کردن و ... رفع ابهام کنیم.

در نوعی از سوالات این حالت، صورت یا مخرج کسر (و یا گاهی هر دو) شامل عبارت‌های رادیکالی است که برای رفع ابهام از آن ابتدا باید صورت و مخرج کسر را در عبارت رادیکالی مناسب ضرب کنیم تا بتوانیم با استفاده از اتحاد مزدوج (و یا گاهی چاق و لاغر) عامل صفرکننده را شناسایی کرده و آن را از صورت و مخرج کسر حذف کنیم.

شبیه‌ساز امتحانات نهایی
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

یادآوری:

$$\begin{cases}(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b\\ (\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})=a\pm b\end{cases}$$

مثال: حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{2-\sqrt{x+1}}=\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{2-\sqrt{x+1}}\times\frac{2+\sqrt{x+1}}{2+\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to 3}\frac{(x^2-9)(2+\sqrt{x+1})}{(2)^2-(\sqrt{x+1})^2}=\lim_{x\to 3}\frac{(x^2-9)(2+\sqrt{x+1})}{4-(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)\cancel{(x-3)}(2+\sqrt{x+1})}{-\cancel{(x-3)}}=\lim_{x\to 3}(-(x+3)(2+\sqrt{x+1}))=-6\times 4=-24$$

۲) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{2x^2-7x+3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\cancel{(x-3)}(x-2)}{\cancel{(x-3)}(2x-1)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-2}{2x-1}=\dfrac{1}{5}$

۳) $\lim\limits_{x\to -1}=\dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{x^2+3x+2}=\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x}+1}{x^2+3x+2}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{x+1}}{\cancel{(x+1)}(x+2)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{1}{(x+2)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)}=\frac{1}{1\times(3)}=\frac{1}{3}$$

۹ مصحح شو:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{4x^n-3x^2-1}{ax^3+5x^2+1}=-2$$

برای این‌که حاصل حد برابر عدد حقیقی -2 باشد، باید بزرگ‌ترین درجهٔ عبارت صورت و عبارت مخرج با هم برابر باشند:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{4x^n-3x^2-1}{ax^3+5x^2+1}=\underbrace{\lim_{x\to -\infty}\frac{4x^n}{ax^3}}_{(0/25)}=-2\Rightarrow\begin{cases}n=3\ \ (0/25)\\ \dfrac{4}{a}=-2\Rightarrow a=-2\ (0/25)\end{cases}$$

بنابراین حاصل خواسته‌شده برابر است با:

$$a+n=-2+3=1\ \ (0/25)$$

۱

۲۰ شو محاسبهٔ حد در بی‌نهایت در توابع کسری:

در محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{ax^n+bx^{n-1}+\dots}{a'x^m+b'x^{m-1}+\dots};(m,n\in\mathbb{Z})$، حد عبارت صورت و مخرج کسر به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کند که در این صورت با حالت مبهم $\dfrac{\infty}{\infty}$ مواجه خواهیم بود که برای رفع ابهام از آن در صورت و مخرج کسر، جمله با بیش‌ترین توان را نگه داشته و مابقی جملات را حذف می‌کنیم، سپس با توجه به جدول زیر حاصل حد را محاسبه می‌کنیم:

نوع	حاصل حد
درجهٔ عبارت صورت از درجهٔ عبارت مخرج بیش‌تر باشد.	$+\infty$ یا $-\infty$
درجهٔ عبارت صورت با درجهٔ عبارت مخرج برابر باشد.	$\dfrac{a}{a'}$
درجهٔ عبارت صورت از درجهٔ عبارت مخرج کم‌تر باشد.	صفر

شبیه‌ساز امتحانات نهایی
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

مثال: حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$* \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3-5x+1}{6x^3-11x^2-3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{6x^3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$* \lim_{x\to-\infty} \frac{-4x^7+5x^2}{2x^3+9} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-4x^7}{2x^3} = \lim_{x\to-\infty} (-2x^4) = -2(-\infty)^4 = -2(+\infty) = -\infty$$

$$* \lim_{x\to-\infty} \frac{5x+4}{x^3+x-8} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5x}{x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5}{x^2} = \frac{5}{(-\infty)^2} = \frac{5}{+\infty} = 0$$

$$* \lim_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x}-5} = \frac{3+\frac{1}{+\infty}}{\frac{4}{+\infty}-5} = \frac{3+0}{0-5} = -\frac{3}{5}$$

۱۰ — ۲

مصحح شو:

الف) می‌دانیم که $f(x)=\sqrt{x+1}$ است، پس به کمک تعریف مشتق داریم:

$$\underbrace{f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{(0/25)} = \underbrace{\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{(x+h)+1}-\sqrt{x+1}}{h}}_{(0/25)} = \frac{0}{0}$$

حال، صورت و مخرج را در مزدوج عبارت صورت ضرب می‌کنیم:

$$\underbrace{\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{(x+h)+1}-\sqrt{x+1}}{h}\times\frac{\sqrt{(x+h)+1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{(x+h)+1}+\sqrt{x+1}}}_{(0/25)} = \lim_{h\to0}\frac{((x+h)+1)-(x+1)}{h(\sqrt{(x+h)+1}+\sqrt{x+1})}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{1}{(\sqrt{(x+h)+1}+\sqrt{x+1}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \quad (0/25)$$

ب) برای نوشتن معادلهٔ خط مماس، ابتدا باید شیب خط مماس را به‌دست بیاوریم. از طرفی می‌دانیم که شیب خط مماس بر منحنی یک تابع در نقطهٔ $x=a$ با $f'(a)$ برابر است. پس:

شیب خط مماس در نقطه‌ای به طول $x=3$: $f'(3)=\frac{1}{2\sqrt{3+1}}=\frac{1}{4}$ (۰/۲۵)

از طرفی، باید به کمک ضابطهٔ تابع f، عرض نقطهٔ $x=3$ را نیز به‌دست بیاوریم:

$$f(x)=\sqrt{x+1} \xrightarrow{x=3} f(3)=\sqrt{3+1}=2 \quad (0/25)$$

حال به کمک شیب خط مماس $(m=\frac{1}{4})$ و نقطهٔ $A(3,2)$ روی آن معادلهٔ خط مماس به‌صورت زیر خواهد بود:

$$y-y_A=m(x-x_A) \Rightarrow \underbrace{y-2=\frac{1}{4}(x-3)}_{(0/25)} \Rightarrow y=\frac{1}{4}x+\frac{5}{4} \quad (0/25)$$

۲۰ شو: الف) شیب خط مماس بر منحنی تابع f در نقطهٔ $A(a,f(a))$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

شیب خط مماس بر منحنی تابع f در نقطهٔ A : $f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

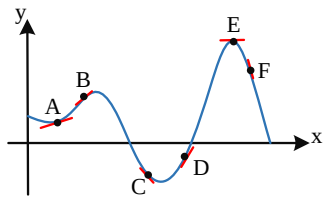
۲۰ شو: ب) معادلهٔ خط مماس در نقطهٔ $A(a,b)$ واقع بر نمودار تابع f برابر است با:

$$y-b=m(x-a)\ ;\ m=f'(a)$$

شیب ساز امتحانات نهایی

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۱۱	مصحح شو:	۱/۵



نقطه	شیب
F	-۳
C	-۱
E	۰
A	$\frac{۱}{۲}$
B	۱
D	۲

راهنمای مصحح: به هر کدام از جاهای خالی در جدول (۰/۲۵) تعلق می‌گیرد. (مجموعاً ۱/۵ نمره)

مقایسهٔ شیب خط مماس بر نمودار به کمک وضعیت صعودی یا نزولی تابع:

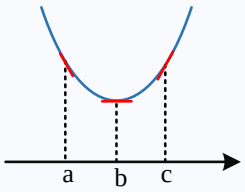
در بعضی از سؤالات از ما می‌خواهند که شیب خط مماس بر نمودار تابع در چند نقطه را با هم مقایسه کنیم و یا این که دربارهٔ علامت مشتق در یک نقطه، سؤالاتی مطرح می‌شود که برای پاسخ دادن به آن‌ها توجه به موارد زیر می‌تواند کمک کننده باشد:

ـ در بازه‌هایی که تابع f صعودی است، شیب خط مماس بر نمودار تابع مثبت است، پس در آن بازه $f' > ۰$ است.

ـ در بازه‌هایی که تابع f نزولی است، شیب خط مماس بر نمودار تابع منفی است، پس در آن بازه $f' < ۰$ است.

ـ در نقاطی از تابع f که شیب خط مماس بر نمودار تابع صفر است (مماس افقی است)، $f' = ۰$ است.

یه مثال ببینیم:



$$\begin{cases} f'(a) < ۰ \\ f'(b) = ۰ \\ f'(c) > ۰ \end{cases}$$

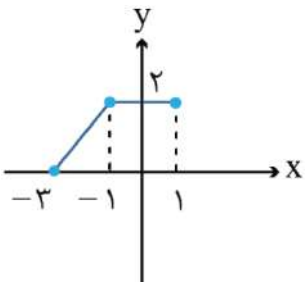
یادتون باشه که:

$f'(x_۰)$ = مشتق تابع f در $x = x_۰$ = شیب خط **مماس** بر نمودار تابع f در نقطه‌ای به طول $x = x_۰$

	موفق باشید.	۲۰

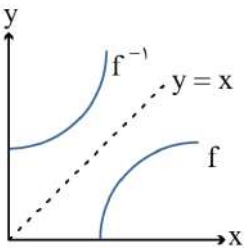
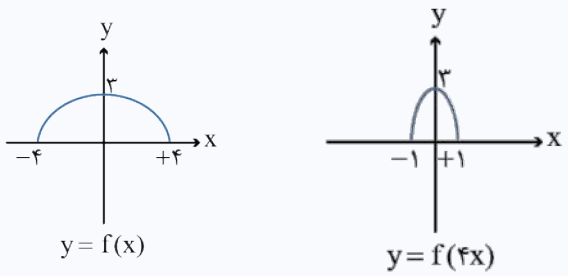
شیب ساز امتحانات نهایی
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **ریاضی ۳**	ساعت شروع:	تاریخ امتحان: **۱۴۰۳/۰۸/۲۵**	مدت امتحان: **۴۰ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	رشته: **علوم تجربی**	پایهٔ **دوازدهم** دورهٔ دوم متوسطه	تعداد صفحات: **۱ صفحه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		**گروه آموزشی ماز**	

ردیف	سؤالات (پاسخ‌برگ دارد) [استفاده از ماشین‌حساب ساده مجاز می‌باشد]	نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) تابع $y=\frac{۱}{x}$ در دامنهٔ خود، اکیداً نزولی است. ب) اگر $۰<k<۱$ باشد، نمودار تابع $f(kx)$ از انقباض نمودار $f(x)$ در راستای محور x ها به‌دست می‌آید. ج) اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=۲x+۱$ باشد آن‌گاه $fog(۴)=g(۱)$ است. د) نمودار تابع f و تابع وارون آن، نسبت به خط $y=x$ قرینه‌اند.	۲
۲	جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. الف) نمودار تابع $y=(x+۲)^۳-۲$ از ناحیه ..... دستگاه مختصات عبور نمی‌کند. ب) اگر $f(x)=\frac{۲}{x-۱}$، دامنهٔ تابع $f^{-۱}of$ به‌صورت ..... است. ج) اگر $f(x)=۱+\sqrt{x+۳}$، دامنهٔ تابع $f^{-۱}(x)$ بازهٔ ..... است. د) فرض کنید بازهٔ $[a,+\infty)$ بزرگ‌ترین بازه‌ای باشد که تابع $y=x^۲-۴x+۵$ در آن بازه یک‌به‌یک است. در این‌صورت مقدار a برابر ..... است.	۲
۳	الف) به کمک انتقال نمودار تابع $y=x^۳$، نمودار تابع $g(x)=(۱-x)^۳+۱$ را رسم کنید. ب) نمودار وارون تابع $g(x)$ را رسم کنید و تعیین کنید که نمودار $g^{-۱}$ از کدام ناحیه عبور نمی‌کند؟ ج) نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}(۱-x)^۳+۱ & x\le ۲\\ ۳x-۶ & x>۲\end{cases}$ را رسم کنید و تعیین کنید در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی است؟	۴/۲۵
۴	الف) در شکل مقابل، نمودار تابع f رسم شده است. نمودار تابع $g(x)=-f(۱+۲x)$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را به‌دست آورید.  ب) حداقل مقدار k را طوری تعیین کنید که نمودار تابع $y=g(x)+k$ از ناحیهٔ سوم عبور نکند.	۴/۲۵
۵	با فرض $f(x)=\sqrt{۳-۲x}$ دامنهٔ تابع $y=(fof)(x)$ را به‌دست آورید.	۳/۲۵
۶	الف) تابع $f(x)=۲-\sqrt{x-۱}$ را در نظر بگیرید. ضابطه و دامنه تابع وارون آن را بیابید و سپس مقدار $f^{-۱}of^{-۱}(۱)$ را محاسبه کنید. ب) اگر $f^{-۱}of^{-۱}(x)=x$ باشد، حدود x را بیابید.	۴/۲۵
	موفق باشید	۲۰

شبیه‌ساز امتحانات نهایی
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **ریاضی ۳**	ساعت شروع:	تاریخ امتحان: **۱۴۰۳/۰۸/۲۵**	مدت امتحان: **۴۰ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	رشته: **علوم تجربی**	پایهٔ **دوازدهم** دورهٔ دوم متوسطه	تعداد صفحات: **۵ صفحه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		**گروه آموزشی ماز**	

ردیف	پاسخ‌نامه	نمره
۱	مصحح شو: الف) نادرست (۰/۵) اگر دامنه تابع را به بازه‌های $(0,+\infty)$ یا $(-\infty,0)$ محدود کنیم آن‌گاه اکیداً نزولی می‌شود. (ص ۸ کاردرکلاس) ب) نادرست (۰/۵) در این حالت در راستای افقی، منبسط می‌شود. (ص ۱۹) ج) درست (۰/۵) (ص ۲۲ تمرین ۴) $g(x)=2x+1 \xrightarrow{x=4} g(4)=(2\times4)+1=9 \quad (*)$ $fog(4)=f(g(4)) \xrightarrow{(*)} f(9) \overset{f(x)=\sqrt{x}}{=\!=} 3$ $g(x)=2x+1 \xrightarrow{x=1} g(1)=2+1=3$ د) درست (۰/۵) نمودار f و f^{-1} نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم $(y=x)$ تقارن دارند. (ص ۲۴)  یادگیری بیش‌تر: ۱) تابع $y=\frac{1}{x}$ در بازه‌های $(0,+\infty)$ و $(-\infty,0)$ به‌صورت جداگانه نزولی است اما در کل دامنه‌اش نه نزولی است و نه صعودی. ۲) برای رسم نمودار $y=f(kx)$، اگر $k>1$ باشد، نمودار در امتداد محور xها با ضریب $\frac{1}{k}$ فشرده می‌شود (انقباض افقی) و اگر $0<k<1$ باشد، نمودار در امتداد محور xها با ضریب $\frac{1}{k}$ کشیده می‌شود (انبساط افقی) مانند:  	۲

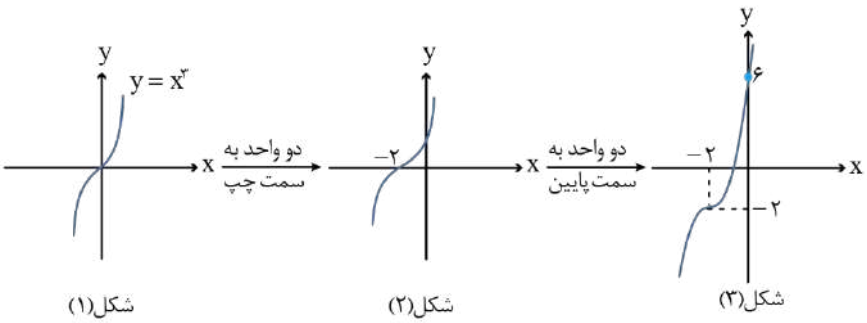
شبیه‌ساز امتحانات نهایی
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲

مصحح شو:

الف) چهارم (۰/۵) (ص ۱۰ تمرین ۱)

نمودار تابع به‌صورت زیر است.



شکل(۱) شکل(۲) شکل(۳)

ب) $\mathbb{R}-\{1\}$ (۰/۵) (ص ۱۴ کاردرکلاس و ص ۲۵)

دامنه $f^{-1}of$ همان دامنهٔ f است:

$$x \in D_f \Rightarrow x \neq 1$$

ج) $[1,+\infty)$ (۰/۵) (ص ۲۷ مثال)

دامنهٔ f بازهٔ $[-3,+\infty)$ است.

$$x \geq -3 \Rightarrow x+3 \geq 0 \Rightarrow 1+\sqrt{x+3} \geq 1 \Rightarrow R_f = [1,+\infty)$$

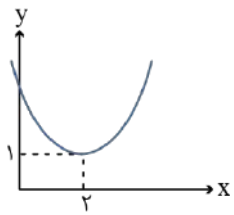
برد f همان دامنهٔ f^{-1} است.

د) ۲ (۰/۵) (ص ۲۹ تمرین ۶)

$x = a$ همان طول رأس سهمی است.

$$y = x^2 - 4x + \overbrace{5} = x^2 - 4x + \overbrace{4+1} = (x-2)^2 + 1$$

همان‌طور که از شکل مشخص است، این تابع در بازه‌های $(-\infty,2]$ و $[2,+\infty)$ یک‌به‌یک است. پس a در بازهٔ داده شده در صورت سؤال (همان $[a,+\infty)$) برابر ۲ است $(a=2)$.



یادگیری بیش‌تر:

۱) دامنهٔ تابع f^{-1} همان برد تابع f می‌باشد. به همین ترتیب برد تابع f^{-1}، همان دامنهٔ تابع f است.

۲) قرار نیست همهٔ تابع‌ها در کل دامنه‌شان وارون‌پذیر باشند اما حالت‌هایی وجود دارند که با محدود کردن دامنه شرط وارون‌پذیری را ایجاد می‌کنیم.

۳) هیچ تابع چندجمله‌ای از درجه ۲ روی $\mathbb{R}$ یک‌به‌یک نیست. اما اگر نمودار f را به یکی از بازه‌های $(-\infty,\frac{-b}{2a}]$ و $[\frac{-b}{2a},+\infty)$ یا هر زیرمجموعه‌ای از این دو بازه محدود کنیم، تابعی یک‌به‌یک خواهیم داشت.

۴) ترکیب تابع f با معکوسش یعنی f^{-1} به‌صورت زیر است:

$$fof^{-1}(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = x \quad ; \quad x \in D_{f^{-1}}$$

$$f^{-1}of(x) = f^{-1}\left(f(x)\right) = x \quad ; \quad x \in D_f$$

تذکر: $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$ دقت کنید علامت -1 در بالای سر f به معنای معکوس شدن کسری نیست.

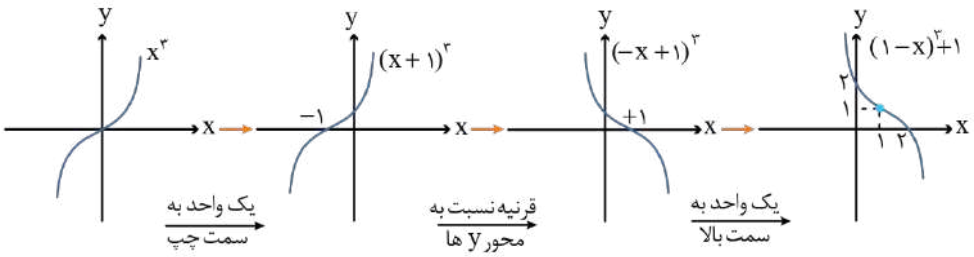
شبیه‌ساز امتحانات نهایی

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳ ۴/۲۵

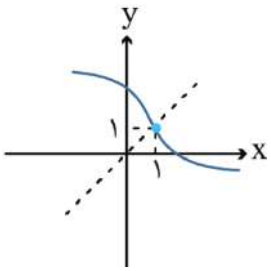
مصحح شو:

الف) نمودار تابع $g(x)=(1-x)^3+1$ را به کمک انتقال و قرینه نمودار $y=x^3$ رسم می‌کنیم. (ص ۱۰ تمرین ۱ و ص ۵ کاردرکلاس)



(۰/۲۵) (۰/۵) (۰/۵) (۰/۵)

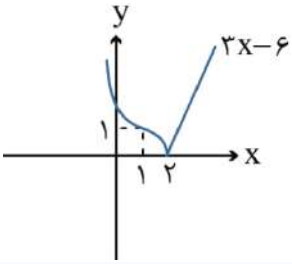
ب) اگر نمودار g را نسبت به خط $y=x$ قرینه کنیم، نمودار g^{-1} به‌دست می‌آید. نمودار g^{-1} از ناحیهٔ سوم عبور نمی‌کند.



(۰/۷۵)

ج) نمودار تابع $f(x)$ به‌صورت زیر است:

در بازهٔ $[2,+\infty)$ صعودی (۰/۵) و در بازهٔ $(-\infty,2]$ نزولی است. (۰/۵)

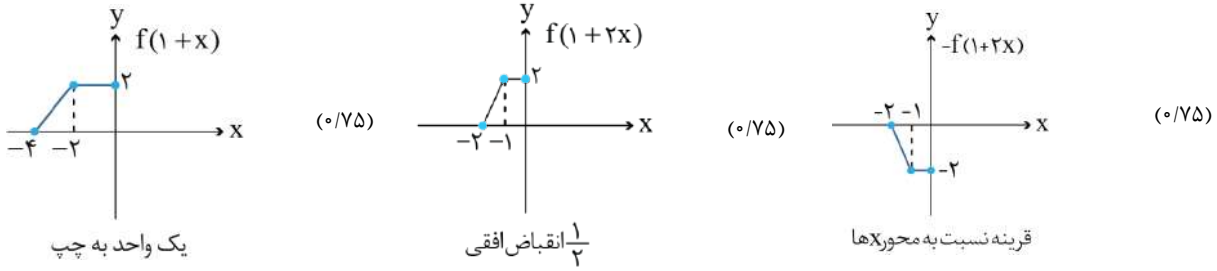


(۰/۷۵)

رسم نمودار توابع:

نمودار جدید $(a,k>0)$	توضیحات و نحوهٔ رسم
$f(x+a)$	نمودار تابع f را به اندازهٔ a واحد در راستای محور x ها به سمت چپ منتقل می‌کنیم.
$f(x-a)$	نمودار تابع f را به اندازهٔ a واحد در راستای محور x ها به سمت راست منتقل می‌کنیم.
$f(x)+a$	نمودار تابع f را به اندازهٔ a واحد در راستای محور y ها به سمت بالا منتقل می‌کنیم.
$f(x)-a$	نمودار تابع f را به اندازهٔ a واحد در راستای محور y ها به سمت پایین منتقل می‌کنیم.
$f(-x)$	نمودار تابع f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.
$-f(x)$	نمودار تابع f را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.
$-f(-x)$	نمودار تابع f را ابتدا نسبت به محور y ها و سپس نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. (در واقع نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌کنیم.)

شبیه‌ساز امتحانات نهایی
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۴	مصحح شو: الف) به کمک تبدیلات و به‌صورت مرحله‌ای، نمودار g را رسم می‌کنیم. (ص ۲۳ تمرین ۱۲)  دامنهٔ تابع g بازهٔ $[-۲,۰]$ (۰/۷۵) و برد تابع g بازهٔ $[-۲,۰]$ است. (۰/۷۵) ب) اگر نمودار g را حداقل ۲ واحد به سمت بالا انتقال دهیم، آن‌گاه از ناحیهٔ سوم عبور نمی‌کند. (۰/۵)	۴/۲۵
۵	مصحح شو: دامنهٔ تابع fog از اشتراک دو مجموعه جواب $x \in D_g$ و $g(x) \in D_f$ به‌دست می‌آید. (ص ۲۲ تمرین ۲) $۳-۲x \geq ۰$ (۰/۵) $\Rightarrow x \leq \frac{۳}{۲}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow D_f = (-\infty, \frac{۳}{۲}]$ (۰/۲۵) $D_{fof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\}$ (۰/۵) $= \left\{x \leq \frac{۳}{۲} \mid \sqrt{۳-۲x} \leq \frac{۳}{۲}\right\}$ (۰/۵) $= \left\{x \leq \frac{۳}{۲} \mid ۳-۲x \leq \frac{۹}{۴}\right\}$ (۰/۲۵) $= \left\{x \leq \frac{۳}{۲} \mid x \geq \frac{۳}{۸}\right\}$ (۰/۵) $= \left[\frac{۳}{۸}, \frac{۳}{۲}\right]$ (۰/۵) ۲۰ ثانیه شو دامنهٔ ترکیب توابع: دامنهٔ توابع fog و gof از فرمول‌های زیر به‌دست می‌آید: $D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$ $D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$	۳/۲۵
۶	مصحح شو: الف) ابتدا x را برحسب y محاسبه می‌کنیم سپس جای x و y را عوض می‌کنیم. (ص ۲۹ تمرین ۱) $y = ۲-\sqrt{x-۱} \Rightarrow \sqrt{x-۱} = ۲-y$ (۰/۲۵) $\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} x-۱ = (۲-y)^۲ = y^۲ - ۴y + ۴$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x = y^۲ - ۴y + ۵$ (۰/۲۵) $\Rightarrow f^{-۱}(x) = y = x^۲ - ۴x + ۵$ (۱) دامنه $f^{-۱}$ همان برد f است. (۰/۲۵) $\sqrt{x-۱} \geq ۰$ (۰/۲۵) $\Rightarrow -\sqrt{x-۱} \leq ۰$ (۰/۲۵) $\Rightarrow ۲-\sqrt{x-۱} \leq ۲$ (۰/۲۵)	۴/۲۵

شبیه‌ساز امتحانات نهایی
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

پس برد f که همان دامنهٔ f^{-1} است برابر بازهٔ $(-\infty,2]$ است. (۰/۲۵)

$$f^{-1}of^{-1}(1)=f^{-1}\left(f^{-1}(1)\right)=f^{-1}(2)=1 \quad (0/75)$$

ب) باید x عضو برد تابع f باشد (۰/۲۵)، پس $x\le 2$ است (۰/۲۵).

یافتن ضابطهٔ معکوس یک تابع

برای یافتن معکوس یک تابع مانند $f(x)$ باید مراحل زیر را دنبال کنیم:

۱) به جای $f(x)$، y می‌گذاریم. (اگر از ابتدا تابع به‌صورت $y=\cdots$ باشد، از این مرحله عبور می‌کنیم.)

۲) x را برحسب y می‌یابیم یا به عبارتی x را تنها می‌کنیم تا به‌صورت $x=\cdots$ دربیاید.

۳) به جای xها، y و به جای yها، x می‌گذاریم. در این مرحله y همان $f^{-1}(x)$ است.

بررسی دقیق‌تر:

ب) برای این‌که تابع $f^{-1}of^{-1}(x)$ تعریف شده باشد باید $x\in D_{f^{-1}(x)}$ باشد و $f^{-1}(x)\in D_{f^{-1}(x)}$.

$$\left\{x\in D_{f^{-1}(x)} \mid \underbrace{f^{-1}(x)\in D_{f^{-1}(x)}}_{\text{با توجه به این‌که تابع همانی است، برقرار است.}}\right\}$$

$$x\in D_{f^{-1}(x)} \xrightarrow{D_{f^{-1}}=R_f} x\in R_f \Rightarrow x\in(-\infty,2] \Rightarrow x\le 2$$

	موفق باشید	۲۰

شبیه‌ساز امتحانات نهایی
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir